Nombres entiers, multiples, diviseurs

4

Narration de recherche

Remplace chaque lettre du tableau par un nombre entier compris entre 1 et 9 sachant que :

- chaque nombre n'est utilisé qu'une seule fois ;
- les produits des nombres de chaque ligne et de chaque colonne sont indiqués à l'extérieur du tableau.

A	B	C	→ 270
D	E	F	→ 16
G	H	I	→ 84
↓ 336	↓ 27	↓ 40	

Prérequis et activités de découverte

Activité 1 : Multiple, diviseur

1. Le jeu de Juniper Green

Règle du jeu : Ce jeu se joue à deux (ou plus) avec **uniquement** les nombres entiers de 1 à 40.

- Le premier joueur choisit un nombre entier.
- Le deuxième joueur doit alors en choisir un autre qui doit être soit multiple, soit diviseur de ce premier nombre.
- Le joueur suivant en choisit encore un autre qui doit être soit multiple, soit diviseur du second nombre. Et ainsi de suite, chaque nombre ne pouvant servir qu'une seule fois !
- Le dernier joueur qui a pu choisir un nombre a gagné !

a. Jouez à ce jeu, en alternant le premier joueur.

b. Le premier joueur prend 40 comme nombre de départ. Quelle est la liste des nombres possibles pour le second joueur ? Même question avec 17 ; 9 et 23.

c. Dans une partie à deux joueurs, quel nombre peut choisir le premier joueur pour être sûr de l'emporter (s'il joue bien !) ? Trouve toutes les possibilités.

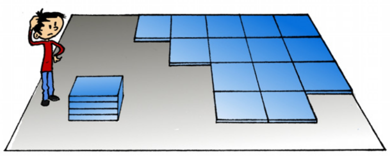
2. Liste des diviseurs

a. Écris 54 comme un produit de deux entiers. Trouve toutes les possibilités. Quelle est la liste des diviseurs de 54 ?

b. Trouve la liste des diviseurs de 720 (il y en a 30 !) et celle des diviseurs de 53.

Activité 2 : Diviseurs communs, PGDC

(≥**)



1. On veut paver une surface rectangulaire avec des carrés identiques et sans coupe. La longueur du côté des carrés est un nombre entier de centimètres.

a. La surface rectangulaire mesure 12 cm par 18 cm. Quelle peut être la longueur du côté des carrés ? Y a-t-il plusieurs possibilités ? Que représente(nt) ce(s) nombre(s) pour 12 et 18 ? Mêmes questions lorsque la surface rectangulaire mesure 49 cm par 63 cm, puis 27 cm par 32 cm et enfin 21 cm par 84 cm.

b. Cherche les dimensions maximales d'un carré pouvant paver une surface rectangulaire de 108 cm par 196 cm.

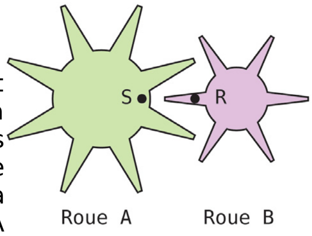
2. Un challenge sportif regroupe 30 filles et 75 garçons. Les organisateurs souhaitent composer des équipes comportant toutes le même nombre de filles et le même nombre de garçons. Comment peux-tu les aider pour qu'ils puissent constituer un nombre maximal d'équipes ? Donne ensuite le nombre de filles et de garçons dans chaque équipe. Explique ta démarche.

3. Pgdc

a. Dresse la liste des diviseurs de 30 et celle des diviseurs de 50. Quel est le plus grand diviseur commun à ces deux nombres ? On appelle ce nombre le **PGDC** de 30 et 50 et on le note : PGDC (30 ; 50) ou PGDC (50 ; 30).

b. Quel est le PGDC de 8 et 24 ? Que remarques-tu ? Essaie de formuler une règle à partir de ce que tu as observé.

Activité 3 : Multiples communs, PPMC (≥**)



1. Un engrenage est formé de 2 roues dentées (A et B) qui ont respectivement 8 et 6 dents. Un point R marqué sur une dent de la roue B fait face à un point S marqué entre deux dents consécutives de la roue A. On met l'engrenage en mouvement. Après combien de tours de la roue A les points R et S seront-ils pour la première fois à nouveau dans la même position ? Même question lorsque la roue A possède 9 dents et la B 12 dents.

2. Pendant l'été, un vendeur de glace ambulant visite le quartier de Jeannette tous les 7 jours et un autre vendeur de glace visite le même quartier tous les 5 jours. Quand les deux vendeurs sont présents le prix des glaces est diminué. Si les deux vendeurs de glaces ont visité le quartier aujourd'hui, quand sera la prochaine fois où le prix des glaces sera diminué ?

3. **PPMC**

a. Dresse la liste des multiples de 9 et celle des multiples de 6. Quel est le plus petit multiple commun à ces deux nombres ? On appelle ce nombre le **PPMC** de 9 et 6 et on le note : PPMC (9 ; 6) ou PPMC (6 ; 9).

b. Quel est le PPMC de 7 et 21 ? Que remarques-tu ? Essaie de formuler une règle à partir de ce que tu as observé.

Activité 4 : Crible d'Eratostène (≥**)

Ératosthène était un astronome, géographe, philosophe et mathématicien grec (276 – 194 av. J.-C.).

a. Recopie ce tableau dans ton cahier.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

b. Entoure le chiffre 2 en rouge et raye tous les multiples de 2 autres que 2. Entoure le chiffre 3 en vert et raye tous les multiples de 3 autres que 3. Recommence avec le premier nombre non rayé et continue le processus jusqu'à ce que tous les nombres soient entourés ou rayés. Utilise des couleurs différentes pour chaque étape.

c. Quelle est la particularité des nombres entourés ?

d. Si on applique ce crible à tous les entiers naturels, 163 serait-il entouré ? Et 1 678 314 ?

e. À l'aide du tableau, détermine les diviseurs de 24, 72, 17, 23 et 71.

Activité 5 : Le triangle de Sierpinski (≥**)

1. Répondre avec des 3 et des • uniquement !

La figure de départ est un triangle équilatéral violet. On construit à l'intérieur de celui-ci un triangle bleu obtenu en joignant les milieux des côtés du triangle de départ.

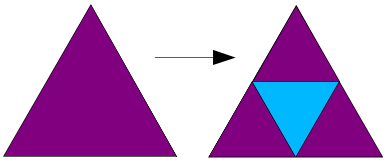


figure de départ figure 1

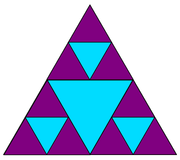


figure 2

a. De la même façon, on construit un petit triangle bleu dans chacun des triangles violets de la figure 1. Combien obtient-on de triangles violets dans la figure 2 ?

b. Imaginons que l'on continue à construire des triangles bleus dans les triangles violets. Combien a-t-on de triangles violets dans la figure 4 ? Puis dans la figure 7 (en n'utilisant encore que des 3 et des signes •) ? Et dans la figure 20 ?

2. Une nouvelle notation : la notation « puissance »

La notation « puissance » est utilisée pour remplacer des produits comme dans les exemples suivants :

- $9 = \underbrace{3 \cdot 3}_{2\text{ facteurs}} = 3^2$ qui se lit « 3 au carré » ou « 3 puissance 2 » ou « 3 exposant 2 »,
- $81 = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{4\text{ facteurs}} = 3^4$ qui se lit « 3 puissance 4 » ou « 3 exposant 4 ».

a. Écris, à l'aide de la notation « puissance », le nombre de triangles violets qu'il y a dans la figure 7 puis calcule ce nombre. Recommence pour la figure 20.

b. À l'aide de ta calculatrice, indique combien il y a de triangles violets dans la figure 13, la figure 18, la figure 10 et enfin dans la figure 15. Existe-t-il un moyen d'effectuer ces calculs facilement avec ta calculatrice ?

Activité 6 : Des produits avec 2, 3 et 5 (≥**)

Nous allons exprimer certains nombres sous la forme de produits. Dans cette activité, les seuls facteurs autorisés sont : 2 ; 3 et 5. Nous utiliserons la notation « puissance » dès que cela est possible.

Exemples : $25 = 5 \cdot 5$ peut s'écrire $25 = 5^2$;
$48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ peut s'écrire $48 = 2^4 \cdot 3$;
$90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$ peut s'écrire $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$.

a. Exprime de la même façon les nombres 4 ; 12 ; 27 ; 30 ; 45 et 108. Peut-on exprimer le nombre 26 de la même façon ? Justifie.

b. Un élève a écrit l'égalité suivante : $54 = 2^1 \cdot 3^3$. En considérant que sa réponse est bonne, combien vaut 2^1 ?

c. Un élève a écrit l'égalité suivante : $50 = 2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^2$. En considérant que sa réponse est bonne, combien vaut 3^0 ?

d. Réécris les trois exemples du départ puis les nombres de la question **a.** sous la forme $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ (a, b et c sont des entiers naturels, éventuellement égaux à 0 ou 1).

e. Trouve le plus possible de nombres inférieurs à 100 qui peuvent s'exprimer sous la forme d'un produit ne comportant que des 2, des 3 et des 5.

f. Si maintenant les facteurs autorisés sont tous les nombres premiers. Exprime sous la forme d'un produit de facteurs premiers les nombres 42, 66, 198 et 990.

Méthode 1 : Multiples, diviseurs et critères de divisibilité

À connaître : Multiples et diviseurs

a et b sont deux entiers naturels non nuls tels que $a = b \bullet k$ (ou $a : b = k$) où k est un entier naturel. On dit que :
a est un multiple de b ou a est divisible par b ou b est un diviseur de a ou b divise a.

Exemple 1 : 1 274 est-il un multiple de 7 ? 974 est-il divisible par 8 ?

1 274 : 7 = 182 donc 1 274 = 7 • 82.
1 274 est donc un multiple de 7 (et de 82). On dit également que 1 274 est divisible par 7 (et par 82), que 7 est un diviseur de 1 274 (82 l'est aussi) ou que 7 divise 1 274 (82 divise aussi 1 274).

974 : 8 = 121,75.
121,75 n'est pas un entier naturel, 974 n'est donc pas divisible par 8. On peut dire également que 8 n'est pas un diviseur de 974 et que 974 n'est pas un multiple de 8.

À connaître : Critères de divisibilité

Un nombre entier est **divisible par 2** si son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8.
Un nombre entier est **divisible par 3** si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
Un nombre entier est **divisible par 9** si la somme de ses chiffres est divisible par 9.
Un nombre entier est **divisible par 5** si son chiffre des unités est 0 ou 5.
Un nombre entier est **divisible par 10** si son chiffre des unités est 0.

Exemple 2 : Détermine des diviseurs de 23 958 à l'aide des critères de divisibilité.

Le chiffre des unités de 23 958 est 8 donc 23 958 est divisible par 2 mais pas par 5 et ni par 10.

La somme des chiffres de 23 958 est 2 + 3 + 9 + 5 + 8 soit 27. Comme 27 est divisible par 3 et par 9 donc 23 958 est divisible par 3 et par 9.

2, 3 et 9 sont donc des diviseurs de 23 958.

Exemple 3 : Établis la liste de tous les diviseurs de 75.

Pour cela, on cherche tous les produits d'entiers naturels égaux à 75.

75 = 1 • 75
Un nombre est toujours divisible par 1 et par lui-même.

75 = 3 • 25
Les critères de divisibilité permettent de dire que 75 est divisble par 3 et 5 mais qu'il n'est pas divisible par 9 et 10.
Les divisions par 4, 6, 7, 8, 11, 12, 13 et 14 ne donnant pas de quotients entiers, 75 n'est pas divisible par ces entiers.

75 = 5 • 15
Le diviseur suivant est 15 et on l'a déjà obtenu avec le produit 5 • 15 : on peut donc arrêter la recherche.

Les diviseurs de 75 sont donc : 1 ; 3 ; 5 ; 15 ; 25 et 75.

Exercices « À toi de jouer »

1 Trouve toutes les possibilités pour le chiffre manquant #, sachant que 3 et 2 divisent le nombre 2 0#4.

2 Établis la liste des diviseurs des entiers suivants : 60, 43 et 36.

3 Détermine si 847 est un mulitple de 7.

Méthode 2 : Déterminer le PGDC de deux entiers naturels (≥**)

À connaître

Le **PGDC de deux entiers naturels** est leur Plus Grand Diviseur Commun.

Exemple : Trouve les diviseurs communs à 30 et 45 puis détermine leur PGDC.

On liste les diviseurs de 30 :
1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 10 ; 15 et 30.

On liste les diviseurs de 45 :
1 ; 3 ; 5 ; 9 ; 15 ; et 45.

Les diviseurs communs à 30 et 45 sont : 1 ; 3 ; 5 et 15.
Le PGDC de 30 et 45 est donc 15, car c'est le plus grand des diviseurs communs.
On note PGDC (30 ; 105) = 15 ou PGDC (105 ; 30) = 15.

Remarque : a et b étant des entiers naturels, si b divise a alors PGDC (a ; b) = b.

Exercices « À toi de jouer »

4 4 est-il un diviseur commun à 24 et 32 ? Est-il leur PGCD ?

5 Quel est le plus grand nombre entier divisant à la fois 35 et 42 ?

Méthode 3 : Déterminer le PPMC de deux entiers naturels (≥**)

À connaître

Le **PPMC de deux entiers naturels** est leur Plus Petit Multiple Commun.

Exemple : Trouve les multiples communs à 8 et 12 puis détermine leur PPMC.

On liste les multiples de 8 :
8 ; 16 ; 24 ; 32 ; 40 ; 48 ; 56 ; 64 ; 72 ; ...

On liste les multiples de 12 :
12 ; 24 ; 36 ; 48 ; 60 ; 72 ; ...

Les multiples communs à 8 et 12 sont : 24 ; 48 ; 72; ...
Le PPMC de 8 et 12 est donc 24, car c'est le plus petit des multiples communs.
On note PPMC (8 ; 12) = 24 ou PPMC (12 ; 8) = 24.

Remarque : a et b étant des entiers naturels, si b divise a alors PPMC (a ; b) = a.

Exercices « À toi de jouer »

6 54 est-il un multiple commun à 9 et 3 ? Est-il leur PPMC ?

7 Quel est le plus petit entier qui est à la fois un multiple de 10 et à la fois un multiple de 15 ?

Méthode 4 : Utiliser la notation a^n (≥**)

À connaître

Pour tout nombre a non nul et tout nombre entier n positif non nul :

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ facteurs}}$$

En particulier : $a^1 = a$. Par convention $a^0 = 1$. a est la base et n est l'exposant.

Exemple : Donne l'écriture décimale des nombres : 2^4 et $2^3 \cdot 3^2$

$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

$2^3 \cdot 3^2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 8 \cdot 9 = 72$

Exercices « À toi de jouer »

8 Donne l'écriture décimale des nombres : A = 3^4; B = $3^2 \cdot 5^2$; C = $(5 \cdot 3)^2$.

Méthode 5 : Nombres premiers et décomposition en produit de facteurs premiers (≥**)

À connaître

Un entier naturel est un **nombre premier** s'il admet exactement deux diviseurs disctincts entiers et positifs (qui sont alors 1 et lui-même).

Remarque : Cette définition exclut 1, qui n'a qu'un seul diviseur entier positif.

Exemple 1 : Détermine si 27 est un nombre premier.

Pour cela on cherche s'il existe un diviseur de 27 différent de 1 et de 27.
27 n'est pas premier car 3 ou 9 sont des diviseurs de 27.

Les nombres premiers inférieurs à 100 sont : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 et 97.

À connaître

Tout nombre entier naturel peut se décomposer de manière unique en un produit de facteurs premiers.

Exemple 2 : Donne la décomposition de 420 en produit de facteurs premiers.

$420 = 10 \cdot 42$
$10 = 2 \cdot 5$
$42 = 6 \cdot 7$
$6 = 2 \cdot 3$

On écrit le nombre comme un produit de deux entiers. Si ce n'est pas possible c'est que le nombre est premier. On recommence cette décomposition pour chacun des facteurs jusqu'à n'obtenir que des nombres premiers. On termine en mettant ensemble tous les facteurs obtenus.

$420 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

420
10 • 42
2•5 6•7
2•3

Exercices « À toi de jouer »

9 114 est-il un nombre premier ? Et 141 ?

10 Donne la décomposition en produit de facteurs premiers de 390 et 594.

Exercices d'entraînement

Multiples et diviseurs

1 *Vocabulaire*

Réponds aux questions suivantes en justifiant.

a. 4 est-il un diviseur de 28 ?

b. 32 est-il un multiple de 6 ?

c. 4 divise-t-il 18 ?

d. 35 est-il divisible par 5 ?

2 Dans chaque cas, écris quatre phrases utilisant les nombres et l'un des mots suivants : diviseur, multiple, divisible, divise.

a. 70 et 210. **b.** 186 et 15 **c.** 192 et 48.

3 *Critères de divisibilité*

Parmi les nombres : 12 ; 30 ; 27 ; 246 ; 325 ; 4 238 et 6 139, indique ceux qui sont divisibles :

a. par 2 **c.** par 5 **e.** par 10

b. par 3 **d.** par 9 **f.** par 25.

4 Parmi les nombres : 21 ; 12 ; 2 ; 619 ; 999 ; 416 ; 296 ; 540 ; 1 785, quels sont les nombres divisibles par

a. 2 ? **c.** 5 ? **e.** 10 ?

b. 3 ? **d.** 9 ? **f.** 25 ?

5 Parmi les nombres 15 ; 17 ; 58 ; 106 ; 54 ; 125 ; 105 ; 1 577 ; 204, quels sont les nombres divisibles par

a. 2 ? **c.** 5 ? **e.** 10 ?

b. 3 ? **d.** 9 ? **f.** 25 ?

6 On s'intéresse aux nombres de trois chiffres de la forme $65u$ où u représente le chiffre des unités.
Quelles sont les valeurs possibles de u pour obtenir :

a. un multiple de 2 ?

b. un nombre divisible par 3 ?

c. un nombre divisible par 9 ?

7 *Division et diviseurs*

a. Effectue la division de 126 par 7.

b. Déduis-en deux diviseurs de 126.

8 *Diviseurs*

a. Écris trois nombres divisibles par 3 mais pas par 9.

b. Écris trois multiples de 5 divisibles par 9.

c. Écris le plus grand diviseur de 36 différent de 36.

9 *Multiples*

a. Trouve des multiples à la fois de 3 et de 5. Sont-ils tous des multiples de 15 ?

b. Trouve des multiples à la fois de 3 et de 6. Sont-ils tous des multiples de 18 ?

10 *Multiples (bis)*

a. Écris trois multiples de 24 et quatre multiples de 18.

b. Trouve le plus grand multiple de 12 inférieur à 75 et le plus grand multiple de 36 inférieur à 100.

c. Cite un nombre multiple de 2 dont un diviseur est 3.

11 *Liste*

a. Trouve tous les nombres divisibles par 5 compris entre 220 et 260.

b. Parmi ces nombres, quels sont ceux qui sont divisibles par 3 ?

12 *Énigme*

Trouve tous les nombres de trois chiffres divisibles à la fois par 3 et par 5 et dont le chiffre des centaines est 7.

13 *Décompositions*

a. Décompose 18 sous la forme d'un produit de deux facteurs entiers différents de 1.

b. Décompose 12 sous la forme d'un produit de trois facteurs entiers différents de 1.

c. Peux-tu décomposer 7 sous la forme d'un produit de deux facteurs entiers différents de 1 ? Et de 3 ?

14 *Diviseurs communs à...*

a. Quels sont les diviseurs de 12 ? Cites-les tous.

b. Quels sont les diviseurs de 15 ? Cites-les tous.

c. Quels sont les diviseurs communs de 15 et de 12 ? Pourquoi ?

15 Écris la liste de tous les diviseurs de :

a. 32 **b.** 67 **c.** 81 **d.** 144

16 *Multiples communs à ...*

a. Écris quelques multiples de 18. Peux-tu les citer tous ?

b. Écris quelques multiples de 15. Peux-tu les citer tous ?

c. Quels sont les multiples communs de 18 et de 15 ?

17 *Encadrement*

a. Encadre 55 puis 193 par des multiples consécutifs de 2.

b. Encadre 56 puis 88 par des multiples consécutifs de 3.

c. Encadre 125 puis 255 par des multiples consécutifs de 4.

Diviseurs communs, PGDC (≥**)

18 *Liste des diviseurs communs et PGDC*

Dans chaque cas, écris la liste des diviseurs communs aux deux nombres et entoure leur PGDC.

a. 12 et 8	**e.** 8 et 18	**i.** 32 et 25
b. 8 et 10	**f.** 12 et 20	**j.** 56 et 84
c. 2 et 6	**g.** 15 et 45	**k.** 55 et 75
d. 6 et 9	**h.** 27 et 18	**l.** 124 et 1

19 *Nombre de joueurs*

Dans un jeu, 180 jetons noirs et 120 jetons blancs doivent être tous répartis entre les joueurs. Tous les joueurs doivent avoir le même nombre de jetons noirs et le même nombre de jetons blancs.

a. Peut-il y avoir vingt joueurs ? Neuf joueurs ?

b. Combien peut-il y avoir de joueurs ? Donne toutes les possibilités.

20 *Chez le fleuriste*

Un fleuriste dispose de 30 marguerites et de 24 tulipes. Il veut composer des bouquets contenant le même nombre de fleurs de chaque sorte en utilisant toutes ses fleurs.

Combien de bouquets peut-il réaliser ? Quelle est la composition de chaque bouquet ? Donne toutes les possibilités.

21 *Le pâtissier*

Un pâtissier dispose de 75 pommes, 50 oranges et 100 poires. Afin de préparer des tartes, il désire répartir ces fruits en les utilisant tous et en obtenant le maximum de tartelettes identiques. Calcule le nombre de tartelettes et indique leur composition.

22 *Carrelage*

Dans une salle de bain, on veut recouvrir le mur se trouvant au-dessus de la baignoire avec un nombre entier de carreaux de faïence de forme carrée dont le côté est un nombre entier de centimètres, le plus grand possible. Détermine la longueur, en centimètres, du côté d'un carreau de faïence sachant que le mur mesure 210 cm de hauteur et 135 cm de largeur. Combien faudra-t-il alors de carreaux ?

23 *Nombres croisés*

Recopie et complète la grille à l'aide des nombres que tu trouveras grâce aux définitions.

	A	B	C	D
I				■
II				
III		■		
IV	■		■	

Horizontalement

I : PGDC(125 ; 250).
II : Ce nombre est un multiple de 9.
III : Le chiffre des unités d'un nombre divisible par 10 -- Ce nombre est divisible par 5.
IV : Le reste de la division euclidienne de 121 par 8 -- Le quotient dans celle de 245 par 112.

Verticalement

A : Le plus petit multiple de 24 à trois chiffres.
B : Le quotient de la division euclidienne de 274 par 10 -- Diviseur commun à tous les entiers.
C : Le chiffre des centaines est 5, celui des unité 4 et c'est le PGDC(1 542 ; 3 598).
D : 3 est un diviseur de ce nombre.

Multiples communs, PPMC (≥**)

24 *PPMC*

Dans chaque cas, donne le PPMC

a. 2 et 6 **d.** 20 et 30 **g.** 14 et 35

b. 12 et 8 **e.** 18 et 24 **h.** 18 et 20

c. 15 et 20 **f.** 48 et 36 **i.** 36 et 60

25 Jeu de carte

On sait d'un jeu de cartes qu'il possède un nombre de cartes qui est un mulitple de 4 et de 5.

a. Peut-il y avoir cinquante cartes ? vingt cartes ?

b. Combien le paquet peut-il avoir de cartes ? Donne toutes les possibilités inférieures à 100.

26 Marguerite

Marguerite reçoit pour son anniversaire un sac plein de bulbes de fleurs à planter. Le même jour, Marguerite cherche une place dans son jardin pour y planter ses bulbes. Si elle les plante par rangées de trois, il lui en reste un. En rangées de quatre, il lui en reste zéro. En rangées de cinq, il lui en reste zéro. En rangées de sept, il lui en reste zéro.

a. Explique pourquoi le nombre de bulbes doit être un multiple commun de 4, 5 et 7.

b. Comment choisir le nombre de bulbes de fleurs pouvant être dans le paquet pour satisfaire toutes les conditions ?

27 Les trains

Deux trains partent en même temps de la gare d'Aigle. Le train A qui part en direction de Leysin met environ 60 minutes pour faire l'aller et retour. Le train B qui part en direction des Diablerets met environ 80 minutes pour faire l'aller et retour. Si les conducteurs se disent bonjour à 8h le matin à la gare d'Aigle, quelle heure sera-t-il la prochaine fois qu'ils pourront se saluer à la gare d'Aigle ?

Puissance d'un nombre (≥**)

28 *Vocabulaire*

Voici une liste de mots : base, exposant, puissance, facteurs, produit. Recopie chaque phrase en la complétant par le mot qui convient.

a. 3^7 se lit « 3 ... 7 ».

b. 5^4 est le ... de quatre ... tous égaux à 5.

c. 8 est l'... de 6^8 et 6 est la ... .

d. Le ... de six ... égaux s'écrit sous la forme d'une ... d'... 6.

29 *D'une écriture à l'autre*

a. Écris en toutes lettres : 3^4 ; 2^3 et $7{,}1^9$.

b. Écris en expressions mathématiques :

- huit puissance neuf
- trois puissance cinq
- quatre au cube
- sept au carré

30 *Notations puissance*

Recopie et complète chaque expression par le (ou les) exposant(s) manquant(s) :

a. $4 \bullet 4 \bullet 4 \bullet 4 \bullet 4 \bullet 4 \bullet 4 \bullet 4 \bullet 4 = 4^{\cdots}$

b. $0{,}1 \bullet 0{,}1 \bullet 0{,}1 = 0{,}1^{\cdots}$

c. $2 \bullet 3 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 3 = 2^{\cdots} \bullet 3^{\cdots}$

d. $2 \bullet 2 \bullet 3 \bullet 3 \bullet 3 \bullet 5 = 2^{\cdots} \bullet 3^{\cdots} \bullet 5^{\cdots}$

31 *Décomposition*

Décompose chaque expression comme dans l'exercice 30 :

a. 2^4 **c.** $0{,}1^5$ **e.** $3^2 \bullet 5^3$

b. 7^2 **d.** $1{,}2^2$ **f.** $10^2 \bullet 6^1$

32 Décompose puis donne l'écriture décimale sans l'aide de calculatrices.

a. 2^4 **d.** $1{,}2^2$ **g.** 17^1

b. 7^2 **e.** 1^5 **h.** 12^0

c. $0{,}1^3$ **f.** 0^4 **i.** 10^3

33 *Calculatrice*

Donne l'écriture décimale en calculant à la calculatrice :

a. 2^{14} **b.** 17^7 **c.** 8^{11} **d.** $1{,}2^6$

Nombres premiers et décompositions (≥**)

34 *Produit de puissances*

Écris les nombres suivants sous la forme d'un produit :

a. de puissances de 2 et de 5 :

$A = 2 \bullet 2 \bullet 5 \bullet 5 \bullet 5 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 5 \bullet 5$

$B = 25 \bullet 10 \bullet 5 \bullet 8$ $C = 625 \bullet 512$

b. de puissances de 2, de 3 et de 7 :

$D = 2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 3 \bullet 7 \bullet 7$F $= 12 \bullet 21 \bullet 49$

$E = 32 \bullet 21 \bullet 12$ $G = 42$

35 *Drôles de dames...*

Nefissa a trouvé une décomposition de 500 en un produit de 3 facteurs : $500 = 2 \bullet 25 \bullet 10$. Ivete affirme qu'elle a trouvé des décompositions avec plus de facteurs. Donne toutes les décompositions qu'Ivete a pu trouver.

36 Parmi les nombres suivants, quels sont ceux qui sont premiers ?

a. 25 **d.** 4 **g.** 56 **j.** 31

b. 17 **e.** 99 **h.** 19 **k.** 88

c. 36 **f.** 27 **i.** 12 **l.** 1

37 *Produit de facteurs premiers*

Donne la décomposition en facteurs premiers des nombres suivants.

a. 96 **d.** 252 **g.** 420

b. 220 **e.** 360 **h.** 480

c. 245 **f.** 405 **i.** 891

Exercices d'approfondissement

38 *Divisibilité par 4 et 100*

Un nombre est divisible par 4 si et seulement si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4.

Un nombre est divisible par 100 si et seulement si ses deux derniers chiffres sont 0.

Parmi les nombres

21 ; 12 ; 2 ; 619 ; 120 ; 416 ; 296 ; 540 ; 1700,

quels sont les nombres divisibles par

a. 4 ? **b.** 100 ?

39 *Pair*

Explique pourquoi le produit de deux entiers consécutifs est toujours pair.

40 *Séminaire*

Lors d'un séminaire, 324 personnes doivent se répartir dans divers ateliers. Tous les ateliers doivent avoir le même effectif, compris entre 30 et 60 personnes. Quelles sont les différentes possibilités ?

41 *Nombres parfaits*

a. Écris la liste de tous les diviseurs de 6.

b. Calcule la somme de tous ces diviseurs à l'exception de 6.

c. Que remarques-tu ? On appelle nombre parfait tout entier qui a cette particularité.

d. Vérifie que 496 est un nombre parfait.

e. Trouve tous les nombres parfaits compris entre 20 et 30.

42 Trouve les nombres entiers de trois chiffres multiples de 5 dont la somme des chiffres est 21.

43 Les trois filles

Dans une famille, il y a trois filles. La somme de leurs âges est 13 et le produit est 36.

Quel est l'âge de chaque fille ? Trouve toutes les possibilités.

44 *(≥**) Pages*

Deux livres ont respectivement 160 et 192 pages. Chacun de ces livres est formé de fascicules ou cahiers, qui ont tous un même nombre de pages, compris entre 30 et 50.

a. Quel est le nombre de pages d'un cahier ?

b. Quel est le nombre de cahiers qui composent les deux livres ?

45 *(≥**) Tempête*

Des poteaux téléphoniques étaient plantés le long d'une route, sur une ligne droite et régulièrement espacés d'un nombre entier de mètres.

Après une tempête, il n'en reste plus que trois : le premier et le dernier puis un autre situé entre les deux, à 345 m du premier et 184 m du dernier. Un technicien arrivé sur les lieux estime le nombre de poteaux tombés à plus de 10 mais à moins de 100 ! Combien de poteaux sont-ils tombés ?

46 *(≥**) Arbres*

Un terrain rectangulaire a pour dimensions 168 m et 294 m. Sur ses côtés, on veut planter des arbres régulièrement espacés d'un nombre entier de mètres. Il doit y avoir un arbre à chaque coin du terrain.

Quel est le nombre minimum d'arbres que l'on pourra planter ?

Exercices d'approfondissement

47 *(≥**) Piscine*

Une piscine rectangulaire mesure 3,36 m par 7,80 m et a une profondeur de 1,44 m. On désire la carreler avec des carreaux carrés tous identiques. Le carreleur ne veut pas faire de découpes de carreaux mais préfère les grands carreaux, plus faciles à poser. Son fournisseur a toutes les tailles de carreaux en nombre entier de centimètres.

a. Quelle taille de carreaux doit-il commander ? Prendre la plus grande mesure possible.

b. Son fournisseur vend les carreaux par lot de 100. Combien de lots doit-il commander ?

48 *Sacrée collection !*

Abdel dit à Doris : « J'ai plus de 400 DVD mais moins de 450 ! En les groupant par 2 ou par 3 ou par 4 ou par 5, c'est toujours la même chose, il m'en reste un tout seul ! ». Combien Abdel a-t-il de DVD ?

49 *Escalier*

Le nombre de marches d'un escalier est compris entre 40 et 80.

- Si on compte ces marches deux par deux, il en reste une.
- Si on les compte trois par trois, il en reste deux.
- Si on les compte cinq par cinq, il en reste quatre.

Quel est le nombre de marches de cet escalier ?

50 *(≥**) La numération moderne*

$3 \bullet 10^3 + 2 \bullet 10^2 + 8 \bullet 10^1 + 4 \bullet 10^0$ est la décomposition en base « dix » de 3 284. Décompose les nombres 5 348 et 4 367 214 en base « dix ».

51 *Les limites de la calculatrice*

a. Avec la calculatrice, donne un ordre de grandeur du produit de 987 654 par 876 534.

b. Calcule le résultat exact de ce produit.

52 *(≥**) L'unité d'enregistrement informatique*

En informatique, on utilise une unité d'enregistrement appelée « octet ».

a. Calcule avec ta calculatrice la valeur des expressions suivantes :

$A = 2^{10}$ octets, $B = 2^{20}$ octets $C = 2^{30}$ octets.

b. Explique pourquoi l'expression A est généralement appelée « 1 kilooctet ». On note A ≈ 1 ko (10^3 octets). Par approximation, on écrit A = 1 ko.

c. De même B est appelé « 1 Mégaoctet » (1 Mo) et C « 1 Gigaoctet » (1 Go). Indique par quelles puissances de 10, se traduisent les préfixes « méga » et « giga » ?

53 *(***) Multiple et diviseur*

a. À l'aide de la calculatrice retrouve les nombres entiers positifs non nuls n, m et p tels que :

$349\,272 = 2^n \bullet 3^m \bullet 7^p \bullet 11$

b. À l'aide de la calculatrice retrouve les nombres entiers positifs non nuls r, s et t tels que :

$36\,288 = 2^r \bullet 3^s \bullet 7^t$

c. On considère :

$N = 2^3 \bullet 3^3 \bullet 7$

Sans calculer la valeur de N, montre que N est un diviseur commun à 349 272 et à 36 288.

d. On considère :

$M = 2^6 \bullet 3^4 \bullet 7^2 \bullet 11$

Sans calculer la valeur de M, montre que M est un multiple commun à 349 272 et à 36 288.

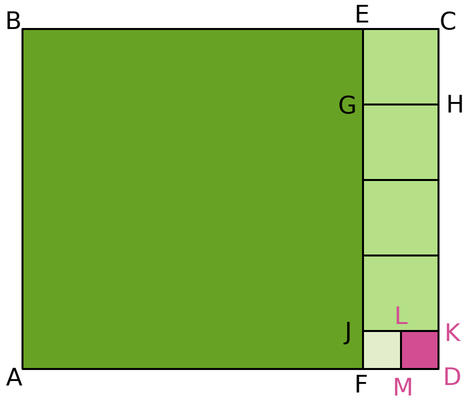
Travail de recherche

1 Méthode géométrique de calcul du PGDC (≥**)

1re Partie : Découverte de la méthode

Dans cette partie, nous allons illustrer le calcul du PGDC de 18 et 22 par une figure géométrique.

On commence par construire un rectangle ABCD tel que AB = 18 et BC = 22. On construit ensuite le carré ABEF. Dans la surface restante représentée par le rectangle ECDF, on peut placer quatre carrés de côté EC. On construit ensuite le carré JLMF et on constate que la surface restante est l'intérieur d'un carré : LKDM.



a. Chaque membre du groupe reproduit cette figure en choisissant un carreau ou 1 cm comme unité.

b. Chaque membre calcule le PGDC de 18 et 22.

c. À quelle longueur correspond le PGDC de 18 et 22 ?

2e Partie : Quelques autres exemples

d. Chaque membre détermine le PGDC de 12 et 45 par la méthode géométrique (sur une feuille à petits carreaux).

e. Chaque membre vérifie son résultat en calculant le PGDC de 12 et 45 par la méthode des soustractions successives.

f. Chaque membre choisit un nombre entre 10 et 20 et un autre nombre entre 40 et 50. Il donne ses deux nombres à son voisin de droite qui doit déterminer leur PGDC par la méthode géométrique (sur une feuille à carreaux).

2 Dans le coeur des micros (≥**)

1re Partie : Parlons chiffre

En informatique, on utilise seulement des 0 et des 1 pour coder les nombres. On travaille avec un système de numération binaire.

Écriture binaire	Écriture décimale	Lien entre les deux écritures
1	1	$1 \bullet 2^0$
10	2	$1 \bullet 2^1 + 0 \bullet 2^0$
11	3	$1 \bullet 2^1 + 1 \bullet 2^0$
100	4	$1 \bullet 2^2 + 0 \bullet 2^1 + 0 \bullet 2^0$

a. Observez bien la table de correspondance précédente puis déterminez l'écriture en binaire des entiers inférieurs à 10.

b. Reproduisez la feuille de calcul suivante sur un tableur :

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Nombre en binaire							
2	0	1	1	1	1	1	0	1
3	Nombre en écriture décimale						...	

Programmez en G3 le calcul nécessaire pour obtenir l'écriture décimale d'un nombre en binaire.

2e Partie : La table ASCII

L'unité d'enregistrement en informatique est le **bit**, symbolisé par un 0 ou un 1. Un **octet** correspond à une suite de huit bits, par exemple 0100 1101.

c. Combien de nombres peut-on écrire avec un octet ?

Pour coder la centaine de caractères présents sur un clavier, on les numérote de 0 à 255 et on les code à l'aide d'un octet. La table qui permet de mettre en correspondance un caractère et le nombre entre 0 et 255 s'appelle la **table ASCII**. Récupérez-la sur Wikipedia.

d. Retrouvez l'écriture décimale du nombre 0100 0001. À quelle lettre correspond-il ?

e. À l'aide de la question **a.**, retrouvez l'écriture en binaire des codes des autres lettres de l'alphabet.

f. Choisissez alors quatre mots de moins de dix lettres, codez-les en binaire puis demandez aux autres groupes de les retrouver. Faites de même avec les mots qui vous auront été donnés.

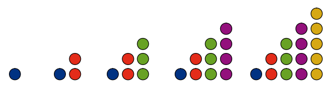
Se tester avec le QCM !

		R1	R2	R3	R4
1	84 est divisible par ...	5	9	2	3
2	150 est divisible par ...	3	2	5	10
3	435 est ...	un multiple de 5	un diviseur de 5	divisible par 5	Un multiple de 3
4	17 est ...	un diviseur de 3 672	un multiple de 17	le seul diviseur de 17	un multiple de 8,5
5	Retrouve la (ou les) affirmation(s) vraie(s) :	Tout nombre entier est un multiple de 0	Il existe toujours au moins un diviseur commun à deux entiers	La liste des diviseurs d'un entier est infinie	Un nombre entier est toujours divisible par lui-même
(≥**) 6	15 est ...	un diviseur commun à 30 et 45	le PGDC de 30 et 45	le plus grand multiple commun à 3 et 5	le plus grand des diviseurs communs à 60 et 135
(≥**) 7	Le PGCD de 12 et 18 est...	1	6	2	0
(≥**) 8	24 est ...	le PPMC de 6 et 4	un multiple commun à 8 et 6	le PPMC de 8 et 6	un multiple de 48
(≥**) 9	5^3 = ...	15	8	125	03:05:00
(≥**) 10	51 est ...	un nombre premier	un multiple de 7	divisible par 17	un diviseur de 102
(≥**) 11	Dans 4^3, 3 est	la base	l'exposant	la puissance	le facteur
(≥**) 12	La décomposition en produits de facteurs premiers de 84 possède ...	3 facteurs distincts	le facteur 2^3	4 facteurs	deux facteurs premiers

Récréation mathématique

Nombres triangulaires

Ci-dessous, les cinq premiers nombres « triangulaires » :



1 3 6 10 15

a. Quel est le millième ?

b. Que remarques-tu lorsque tu additionnes deux nombres triangulaires consécutifs ?

Geôle

Dans un donjon, vingt cellules numérotées de 1 à 20 sont fermées à clé. Ces cellules s'ouvrent et se ferment en un tour de clé.

Alors que les prisonniers dorment à poings fermés, un premier gardien, les pensant ouvertes, met un tour de clé à toutes les cellules.
Peu après, un deuxième gardien met un tour de clé à toutes les cellules dont le numéro est multiple de 2.
Arrive ensuite un troisième gardien qui met un tour de clef à toutes les cellules dont le numéro est un multiple de 3 !
Et ainsi de suite...
Au final, vingt gardiens se sont succédés !

a. Quels sont les numéros des cellules dont les prisonniers vont facilement pouvoir s'évader ?

b. Reprends le même problème avec 500 cellules et 500 passages de gardiens !! Justifie ta réponse.