Activité 16 « Dernier chiffre»

Fiche de présentation

Titre de ’activité	Dernier chiffre
Sous-titre	Trouver un moyen pour déterminer le dernier chiffre de 7^{12}.
Degré(s) concerné(s)	10PO – toutes filières (aussi possible plus tôt, dès la 8CO, voir encore plus tôt)
Durée estimée	1 ou 2 périodes de 45 minutes
Résumé	Trouver un moyen pour déterminer le dernier chiffre de 7^{12}.
Contexte d’usage de la calculatrice	DECOUVRIR
Contenus et compétences mathématiques visés	Différence entre chiffre et nombre Écriture en base 10 Puissances entières positives Observation et conjecture Démontrer selon le niveau des élèves
Prérequis	Calcul de puissances entières positives
Mots-clé	chiffre
Source	

Énoncé élève (activité 16)

Déterminer le dernier chiffre de 7^{12}.

Corrigé détaillé (activité 16)

- Méthode 1

$7^{11} = 1977326743$ est la dernière puissance de 10 pour laquelle on est sûr du résultat donné par la machine.

On écrit ensuite : $7^{12} = 7^{11} \cdot 7 = 1977326743 \cdot 7 = (1977326740 + 3) \cdot 7 = (197732674 \cdot 10 + 3) \cdot 7$

$= 197732674 \cdot 10 \cdot 7 + 3 \cdot 7 = 197732674\ 7 \cdot 10 + 21$

$197732674 \cdot 7 \cdot 10$ se termine par 0, donc $197732674 \cdot 7 \cdot 10 + 21$ par 1

- Méthode 2

(plutôt pour les enseignant-e-s si on veut formaliser avec le calcul modulo ; faisable avec les élèves si on reste sur des observations non démontrées)

On peut aussi lister les puissances successives de 7 pour observer la régularité des derniers chiffres :

7 – 49 – 343 – 2401 – 16807 – 117649 – 823543 – 5764801 - …

on conjecture un cycle de longueur 4 pour les derniers chiffres : 7 – 9 – 3 – 1

➔ par exemple :

Conjecture : $7^{4n} \equiv 1 \pmod{10}$

Démonstration :

$7^{4n} \equiv (7^4)^n \pmod{10}$

$\equiv (2401)^n \pmod{10}$

$\equiv (1)^n \pmod{10}$

$\equiv 1 \pmod{10}$

➔ et aussi :

Conjecture : $7^{4n+3} \equiv 3 \pmod{10}$

Démonstration :

$7^{4n+3} \equiv (7^4)^n\, 7^3 \pmod{10}$

$\equiv (2401)^n\, 343 \pmod{10}$

$\equiv (1)^n\, 3 \pmod{10}$

$\equiv 3 \pmod{10}$

Comme $12 = 4 \cdot 3$ est de la forme 7^{4n}, le dernier chiffre de 7^{12} est bien 1

➔ Remarque : on peut aussi démontrer ce genre de conjecture par récurrence.

- Méthode 3

  $7^{12} = 7^4.7^4.7^4 = 2401^3$.

  Le produit de nombres qui se terminent par 1 est un nombre qui se termine par 1 (thm qui se démontre) puis exploiter l'algorithme de la multiplication ou la distributivité comme fait ci-dessus : on n'a ainsi pas besoin du calcul modulo !

Commentaires pour le maître (activité 16)

Analyse à priori de l'activité (enjeux de l'activité, démarches possibles, difficultés, relances, mise en commun)	Comme il y a de nombreuses façons de démontrer le résultat, il faut anticiper le niveau des élèves pour savoir à quoi on veut arriver. Pour certains élèves, la différence entre un chiffre et un nombre n'est pas très claire Beaucoup d'élèves risquent de se trouver bloqués après avoir calculé les premières puissances de 7, ne mobilisant pas dans cette situation numérique leurs connaissances sur les règles des puissances Beaucoup d'élèves n'ont jamais constaté la périodicité du chiffre des unités des puissances d'un nombre et risquent de ne pas le voir dans les calculs qu'ils feront De même, ce qui est sous-jacent, à savoir l'écriture en base 10, peut également poser des difficultés
Proposition(s) de déroulement	Travail individuel, ou en binôme. Peut également se travailler par groupes : Énoncé élève à travailler en groupes de 3-4, demander aux élèves de réfléchir ensemble au problème posé et de rédiger en commun une acétate. Tirer au sort un élève par groupe pour présenter l'acétate du groupe à la classe. Discussion avec la classe Les énoncés peuvent être identiques ou différents pour chaque groupe. Après que tous les groupes aient présenté leurs résultats, le maître clarifie, hiérarchise, organise, amène les compléments théoriques et propose si nécessaire des exercices de consolidation
Prolongements possibles	7^{2006} cas plus simple où la périodicité apparaît mieux : 9^{12} , mais aussi tous les nombres se terminant par 9 ou 4 (périodicité 2)

Éventuels commentaires après les avoir testées (du maître, des élèves, …)	
Productions d'élèves	

Éléments pour la synthèse (activité 16)

Ce que l'élève devrait avoir retenu

- Différence entre chiffre et nombre
- Écriture en base 10
- Puissances entières positives : définition, propriétés
- Conjecture
- (Démontrer) selon le niveau des élèves

Penser si nécessaire à donner des exercices de consolidation.