## Activité 20 « De simples racines»

### Fiche de présentation

| | |
|---|---|
| **Titre de l'activité** | De simples racines |
| **Sous-titre** | Manipulations de racines carrées avec et sans calculatrice |
| **Degré(s) concerné(s)** | 10PO-11PO / toutes filières |
| **Durée estimée** | 2 à 3 périodes de 45 minutes |
| **Résumé** | On utilise la calculatrice pour conjecturer un résultat autour de racines carrées, puis on manipule ces nombres algébriquement pour démontrer la conjecture.<br>Cette activité suit « naturellement » l'activité « A la recherche de $\sqrt{8}$ ». |
| **Contexte d'usage de la calculatrice** | APPROFONDIR |
| **Contenus et compétences mathématiques visés** | Racines carrées : définition, manipulation avec une machine, manipulation algébrique<br>Nombres irrationnels, développement décimal fini, infini périodique ou pas<br>Distinguer une valeur exacte d'une valeur approchée<br>Conjecturer d'après des observations calculatoires<br>Démontrer une conjecture simple<br>Développer le regard critique à porter sur ses résultats (fournis par une machine mais aussi en général) |
| **Prérequis** | Racines carrées<br>Développements décimaux, approximations<br>Connaître et avoir pratiqué les concepts de conjecture et de démonstration (si ce n'est pas le cas, on peut utiliser cette activité pour introduire ces concepts) |
| **Mots-clés** | racine carrée, nombre irrationnel, approximation, calcul algébrique, conjecture, démonstration |
| **Source** | Base : IUFM Paris ( http://maths.creteil.iufm.fr/second_degre/module_info/calculatrice_college.htm#_Toc21856478)<br>Adaptation Jean-Marie Delley |

## Énoncé élève (activité 20)

1. Calculer avec votre machine $\sqrt{8} - \sqrt{7}$, puis $\frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{7}}$.
   - Quelle fiabilité ont ces résultats ?
   - Que peut-on conjecturer quant à la comparaison de ces deux nombres ?
   - Peut-on démontrer cette conjecture ?
2. Peut-on généraliser la conjecture établie en 1. et la démontrer.

# Corrigé détaillé (activité 20)

1. $\sqrt{8} - \sqrt{7} \cong 0.182675813$ et $\dfrac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{7}} \cong 0.182675813$

- Comme le calcul effectué par la machine est approché, on ne peut être sûr que ces deux nombres soient égaux, il ne s'agit donc que d'une conjecture
- Conjecture : $\sqrt{8} - \sqrt{7} = \dfrac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{7}}$
- Démonstration :

$$\sqrt{8} - \sqrt{7} = (\sqrt{8} - \sqrt{7})\frac{\sqrt{8}+\sqrt{7}}{\sqrt{8}+\sqrt{7}}$$

$$= \frac{\sqrt{8}-\sqrt{7}}{1}\,\frac{\sqrt{8}+\sqrt{7}}{\sqrt{8}+\sqrt{7}}$$

$$= \frac{(\sqrt{8}-\sqrt{7})(\sqrt{8}+\sqrt{7})}{1\cdot(\sqrt{8}+\sqrt{7})}$$

$$= \frac{\sqrt{8}^2-\sqrt{7}^2}{\sqrt{8}+\sqrt{7}}$$

$$= \frac{8-7}{\sqrt{8}+\sqrt{7}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{7}}$$

$$\sqrt{8} - \sqrt{7} = \frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{7}}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{8} - \sqrt{7})(\sqrt{8}+\sqrt{7}) = 1$$

$$? \frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{7}}(\sqrt{8}+\sqrt{7})$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{8} - \sqrt{7})(\sqrt{8}+\sqrt{7}) = 1$$

$$\Leftrightarrow (\left(\sqrt{8}\right)^2 - \left(\sqrt{7}\right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow 8 - 7 = 1$$

$$\Leftrightarrow 1 = 1$$

2. Conjecture : Soit n un entier positif. Alors on a : $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

3. Démonstration :

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$= \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{1}\,\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$= \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{1\cdot(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$$

$$= \frac{\sqrt{n+1}^2-\sqrt{n}^2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$= \frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

Remarque : la démonstration est aussi valable pour des valeurs de n non entières ($n \in R_+^*$)

## Commentaires pour le maître (activité 20)

| | |
|---|---|
| **Analyse à priori de l'activité (enjeux de l’activité, démarches possibles, difficultés, relances, mise en commun)** | La définition mathématique de la racine carrée est souvent mal connue -> à retravailler, en particulier en insistant sur le fait qu’une racine carrée de a est le nombre réel **positif** b tel que $b^2 = a$.<br><br>Les concepts de conjecture et de démonstration ne sont pas anodins ; soit ils ont déjà été travaillés et les élèves peuvent comprendre l’énoncé, soit on peut utiliser cette activité pour introduire ces concepts auprès des élèves en discutant l’activité directement avec tous les élèves en classe.<br><br>Les élèves peuvent avoir de la difficulté à introduire $\sqrt{8}$ - $\sqrt{7}$ et encore plus $\frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{7}}$ à la calculatrice.<br><br>Lien possible avec la démonstration de l’irrationalité de $\sqrt{8}$ (de $\sqrt{2}$ , $\sqrt{7}$,...)<br><br>Le passage à la forme algébrique (généralisation) peut également poser des difficultés spécifiques. Là encore, soit les élèves y sont déjà habitués, soit on peut travailler avec eux ce passage à partir de cette activité |
| **Proposition(s) de déroulement** | Travail individuel, ou en binôme.<br><br>Peut également se travailler par groupes :<br><br>Énoncé élève à travailler en groupes de 3-4, demander aux élèves de réfléchir ensemble au problème posé et de rédiger en commun une acétate.<br><br>Tirer au sort un élève par groupe pour présenter l'acétate du groupe à la classe.<br><br>Discussion avec la classe<br><br>Après que tous les groupes aient présenté leurs résultats, le maître clarifie, hiérarchise, organise, amène les compléments théoriques et propose si nécessaire des exercices de consolidation |

| | |
|---|---|
| **Prolongements possibles** | Cette activité peut « naturellement » être précédée par l'activité « A la recherche de $\sqrt{8}$ »<br>Travailler de façon semblable avec d'autres calculs apparemment complexes mais dont le résultat est finalement très simple<br>Poursuivre le travail de manipulation algébrique de racines<br>Poursuivre le travail de conjecture et de démonstration<br>Montrer les limites du calcul avec une machine (quelle qu'elle soit !) |
| **Éventuels commentaires après les avoir testées (du maître, des élèves, …)** | |
| **Productions d'élèves** | |

# Éléments pour la synthèse (activité 20)

Ce que l'élève devrait avoir retenu

- racine carrée : définition
- propriétés des racines carrées
- nombres rationnels vs irrationnels
- développements décimaux finis, infinis périodiques ou infinis non périodiques
- irrationalité des racines carrées (sauf pour les racines de carrés parfaits)
- multiplication par le conjugué
- manipulations algébriques de racines
- statut d'un nombre irrationnel dans une machine
- selon le niveau des élèves : démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{8}$ (ou de $\sqrt{2}$ )

*Penser si nécessaire à donner des exercices de consolidation.*