Activité 24 « Vacherie !»

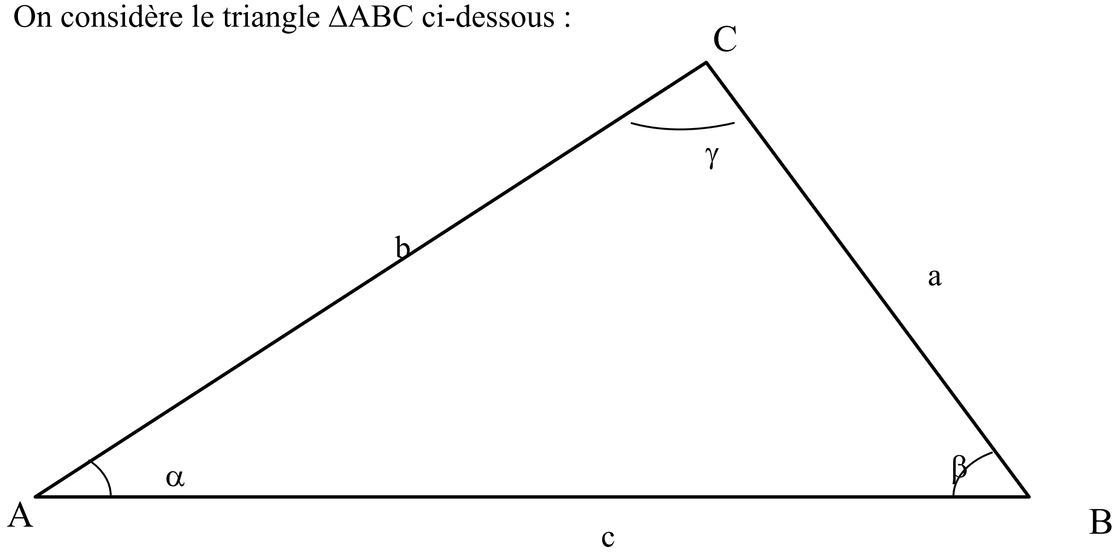
Fiche de présentation

Titre de l’activité	Vacherie !
Sous-titre	Exercices de résolution de triangles en trigonométrie avec la calculatrice.
Degré(s) concerné(s)	11PO – toutes filières concernées
Durée estimée	1 ou plusieurs périodes de 45 minutes
Résumé	Exercices de résolution de triangles en trigonométrie avec la calculatrice. Dans certains cas, il peut y avoir deux solutions, mais la machine n’en fournit qu’une seule !
Type d’usage de la calculatrice	EXECUTER
Contenus mathématiques visées	Résolution de triangles avec la trigonométrie Lien avec les cas d’isométrie des triangles
Prérequis	Trigonométrie dans le triangle quelconque Théorèmes du sinus et du cosinus Connaissance de l’utilisation des touches trigonométriques avec la calculatrice
Mots-clé	Trigonométrie - triangle – cas d’isométrie
Source	Classique Adaptation : Jean-Marie Delley

Énoncé élève (activité 24)

Pour tout cet exercice, on donnera les résultats arrondis au centième. Par ailleurs, on prendra garde d'utiliser la machine au mieux pour minimiser les erreurs et leur propagation.

On considère le triangle ΔABC ci-dessous :



tel que a = 10,64, b = 6,30 et c = 7,10

1. Utiliser le théorème du cosinus pour déterminer γ.
2. Utiliser le théorème du sinus pour déterminer α.
3. Déterminer β grâce au théorème sur la somme des angles dans un triangle.
4. Appliquer le théorème du cosinus à a,b,c et pour vérification.
   Que constate-t-on ? Expliquer.

Corrigé détaillé (activité 24)

1. Thm cosinus : $c^2=a^2+b^2-2ab\cos(\gamma)$, donc

$$\begin{aligned}\cos(\gamma) &= \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\\ &= \frac{10{,}64^2+6{,}3^2-7{,}1^2}{2\cdot 10{,}64\cdot 6{,}3}\\ &(\cong\ 0.76448)\\ \text{donc}\qquad \gamma &= \cos^{-1}\left(\frac{10{,}64^2+6{,}3^2-7{,}1^2}{2\cdot 10{,}64\cdot 6{,}3}\right)\\ &\cong 40{,}14°\end{aligned}$$

2. Thm sinus : $\frac{\sin(\alpha)}{a}=\frac{\sin(\beta)}{b}=\frac{\sin(\gamma)}{c}$, donc

$$\begin{aligned} & \frac{\sin(\alpha)}{a}=\frac{\sin(\gamma)}{c}\\ \Leftrightarrow\quad & \frac{\sin(\alpha)}{10{,}64}=\frac{\sin(40{,}14)}{7{,}1}\\ \Leftrightarrow\quad & \sin(\alpha)=\frac{\sin(40{,}14)\cdot 10{,}64}{7{,}1}\\ (\Leftrightarrow\quad & \cong 0{,}96608)\\ \text{donc}\quad \alpha & = \sin^{-1}\left(\frac{\sin(40.14)\cdot 10{,}64}{7{,}1}\right)\\ & \cong 75{,}03°\end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned}\alpha+\beta+\gamma=180 \quad &\Leftrightarrow\quad \beta=180-\alpha-\gamma\\ &\Leftrightarrow\quad \beta\cong 180-75{,}03-40{,}14\\ &\Leftrightarrow\quad \beta\cong 69{,}83\,°\end{aligned}$$

4. Thm cosinus :

$$\begin{aligned} & b^2=a^2+c^2-2ac\cos(\beta)\\ \Leftrightarrow\quad & 6{,}3^2=10{,}64^2+7{,}1^2-2\cdot 10{,}64\cdot 7{,}1\cdot\cos(69{,}83)\end{aligned}$$

$\Leftrightarrow \quad 39{,}69=111.52$

c'est faux !

Explication : dans le calcul de α en 2., on utilise la fonction $\sin^{-1}$ de la calculatrice, qui, pour rester bijective, ne s'applique qu'à des angles de l'intervalle [-90°; 90°] (la fonction $\cos^{-1}$ s'applique à des angles de , elle, l'intervalle [0°; 180°]). Chaque fois qu'on utilise les touches $\sin^{-1}$ et $\cos^{-1}$, il faut donc être très attentif à se poser la question de savoir si il n'y aurait pas d'autres solutions au problème considéré, autrement dit si les angles qu'on cherche sont bien dans l'intervalle de définition de la calculatrice pour les fonctions $\sin^{-1}$ et $\cos^{-1}$.

Dans ce cas, lorsqu'on résout un triangle quelconque, l'utilisation du thm du cosinus pour rechercher un angle ne cause pas de problème, puisque la machine donnera l'unique solution comprise dans l'intervalle [0 ;180], ce qui correspond toujours à ce qu'on cherche. Si on cherche un côté, toujours avec le thm du cosinus, on aura à résoudre une équation du deuxième degré, qui aura zéro, une ou deux solutions (selon les informations connues sur le triangle, il peut n'y avoir aucune solution, si la longueur du plus grand côté est supérieure à la somme des deux autres côtés, une seule solution, si on est dans l'un des trois cas d'isométrie des triangles CCC/CAC/ACA, ou deux solutions dans les autres cas.

Par contre, lorsqu'on utilise le thm du sinus, on risque de faire des erreurs ; c'est le cas dans cet exercice. Quand on doit résoudre $\sin(\alpha)=\frac{\sin(40{,}14)\cdot 10{,}64}{7{,}1}$, il y a en fait deux solutions possibles, et la machine n'en donne qu'une, celle qui est dans [-90 ;90] ! Il faut penser à trouver la seconde – égale à l'angle supplémentaire à la première solution (complémentaire à 180° de la première – puis voir laquelle sera celle qui est solution du problème :

Résolution correcte avec le thm du sinus :

Thm sinus : $\frac{\sin(\alpha)}{a}=\frac{\sin(\beta)}{b}=\frac{\sin(\gamma)}{c}$, donc

$$\frac{\sin(\alpha)}{a}=\frac{\sin(\gamma)}{c}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sin(\alpha)}{10{,}64}=\frac{\sin(40{,}14)}{7{,}1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin(\alpha)=\frac{\sin(40{,}14)\cdot 10{,}64}{7{,}1}$$

$$(\Leftrightarrow \quad \cong 0{,}96608)$$

$$\text{donc} \quad \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{\sin(40.14)\cdot 10{,}64}{7{,}1}\right)$$

$$\cong 75{,}03°$$

$$\text{ou} \quad \alpha \cong 180-75{,}03$$

$$\cong 104{,}97°$$

Il y a deux candidats solutions, alors qu'on sait qu'il n'y a qu'une unique solution au problème car

- la longueur du plus grand côté est bien inférieure à la somme des deux autres côtés
- on connaît 3 côtés, donc par cas d'isométrie CCC, la solution est unique

Cas 1 : $\beta \cong 180 - 75{,}03 - 40{,}14 \cong 69{,}83°$

Cas 2 : $\beta \cong 180 - 104{,}97 - 40{,}14 \cong 34{,}89°$

On vérifie en utilisant le théorème du cosinus ou du sinus dans les deux cas et on voit que la solution correcte est celle du cas 2.

Remarque : pour cet exercice, si on en a le choix, il serait plus prudent de continuer à utiliser le thm du cosinus pour déterminer α , on se serait épargné tous ces problèmes !

Commentaires pour le maître (activité 24)

Analyse à priori de l'activité (enjeux de l'activité, démarches possibles, difficultés, relances, mise en commun)	Ce type de « vacherie » risque de laisser perplexe plus d'un élève … Attention de bien expliquer et faire comprendre les enjeux de cette activité après coup.
Proposition(s) de déroulement	Recherche individuelle, ou en binôme. Peut également se travailler par groupes, par exemple en distribuant des énoncés différents aux groupes et en faisant présenter les résultats obtenus devant la classe par un membre du groupe tiré au sort. Énoncé élève à travailler en groupes de 3-4, demander aux élèves de réfléchir ensemble au problème posé et de rédiger en commun une acétate. Tirer au sort un élève par groupe pour présenter l'acétate du groupe à la classe. Organiser un débat avec la classe Reprendre les résultats obtenus, les hiérarchiser, les organiser et proposer des activités de consolidation
Prolongements possibles	
Éventuels commentaires après les avoir testées (du maître, des élèves, …)	
Productions d'élèves	

Éléments pour la synthèse (activité 24)

Ce que l'élève devrait avoir retenu

- La calculatrice ne donne pas toutes les solutions des équations trigonométriques.
- Importance de savoir utiliser judicieusement le cercle trigonométrique pour représenter les situations étudiées.
- Importance de garder un sens critique face à toute solution obtenue par calcul

Penser si nécessaire à donner des exercices de consolidation.