Je comprends B3

Théorie par l'exemple et la vidéo

1) Égalités et inégalités

L'essentiel en vidéo

(In)égalités et principes pour agir sur des (in)égalités

http://sesamath.ch/postco/cl/03/v01-p

Agir sur des (in)égalités : exemples

http://sesamath.ch/postco/cl/03/v01-e

Définition

Une **égalité** est une relation entre deux expressions – appelés **membre de gauche** et **membre de droite** – qui indique qu'elles sont identiques. On utilise le symbole « = » et on dit pour $a = b$ « a est égal à b ».

Une **inégalité** est une relation entre deux expressions – appelés **membre de gauche** et **membre de droite** – qui indique que l'une est (strictement) inférieure ou supérieure à l'autre. On utilise les symboles <, >, ≤ et ≥ et don dit : $a < b$ « a est strictement inférieur à b » ou « b est strictement supérieur à a », $a > b$ « a est strictement supérieur à b » ou « b est strictement inférieur à a », $a \leq b$ « a est inférieur ou égal à b » ou « b est supérieur ou égal à a », $a \geq b$ « a est supérieur ou égal à b » ou « b est inférieur ou égal à a »

Dans les deux cas, les membres peuvent comporter une ou plusieurs lettres appelées **inconnues**. Les lettres différentes représentent des nombres *a priori* différents alors qu'une même lettre écrite à plusieurs endroits représente obligatoirement le même nombre.

» **Exemple :** $2x^2 - 5 = x + 10$ est une **égalité** où l'inconnue est désignée par la lettre x.
Cette égalité a deux membres : $2x^2 - 5$ (membre de gauche) et $x + 10$ (membre de droite).

» **Exemple :** $3x - 2xy + 5y^2 > 5x^2y + 3$ est une **inégalité** à deux inconnues x et y.
Cette inégalité a deux membres : $3x - 2xy + 5y^2$ (membre de gauche) et $5x^2y + 3$ (membre de droite).

Principes pour agir sur les égalités

Pour tous nombres a, b et c :

Une égalité reste vraie **si on ajoute ou si on soustrait un même nombre** à ses deux membres :

- si $a = b$, alors $a + c = b + c$
- si $a = b$, alors $a - c = b - c$

Une égalité reste vraie **si on multiplie ou si on divise** ses deux membres **par un même nombre non nul** :

- si $c \neq 0$ et $a = b$ alors $a \cdot c = b \cdot c$
- si $c \neq 0$ et $a = b$ alors $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$

» **Exemple :** si $a = 5$, alors $a + 2 = 5 + 2$, $a - 7{,}3 = 5 - 7{,}3$, $3a = 3 \cdot 5$ ou $\frac{a}{9} = \frac{5}{9}$.

Exercice corrigé

Sachant que $x = 6$, déduis-en une égalité pour chaque expression suivante :

- $x + 4{,}5$
- $x - 15$
- $2 \cdot x$
- $-3 \cdot x$

Correction

On sait que $x = 6$; grâce aux principes pour les égalités, on peut en déduire que :

$x + 4{,}5 = 6 + 4{,}5$, c'est-à-dire $x + 4{,}5 = 10{,}5$

$x - 15 = 6 - 15$, c'est-à-dire $x - 15 = -9$

$2 \cdot x = 2 \cdot 6$, c'est-à-dire $2x = 12$

$-3 \cdot x = -3 \cdot 6$, c'est-à-dire $-3x = -18$

Je comprends B3

Théorie par l'exemple et la vidéo

Principes pour agir sur les inégalités

Pour tous nombres a, b et c :

Une inégalité reste vraie **si on ajoute ou si on soustrait un même nombre** à ses deux membres, c'est-à-dire que :

- si $a \leqslant b$ alors $a + c \leqslant b + c$
- si $a \leqslant b$ alors $a - c \leqslant b - c$

Une inégalité reste vraie **si on multiplie ou si on divise** ses deux membres **par un même nombre positif non nul**, c'est-à-dire que :

- si $a \leqslant b$ et $\boldsymbol{c > 0}$ alors $a \cdot c \leqslant b \cdot c$ et $\dfrac{a}{c} \leqslant \dfrac{b}{c}$

Une inégalité reste vraie **si on multiplie ou si on divise** ses deux membres **par un même nombre <u>négatif non nul</u>, pour autant qu'on <u>change le sens de l'inégalité</u>** c'est-à-dire que :

- si $a \leqslant b$ et $\boldsymbol{c < 0}$ alors $a \cdot c \geqslant b \cdot c$ et $\dfrac{a}{c} \geqslant \dfrac{b}{c}$

» **Exemple :** par souci de simplification d'écriture, on n'a écrit ci-dessus ces principes que pour $\leqslant$, mais ils sont bien entendu également identiques pour $<$, $>$ et $\geq$.

Exercices corrigés

Sachant que $x \geqslant 6$, déduis-en une inégalité pour chaque expression suivante :

- $x + 4{,}5$
- $x - 15$
- $x + (-4)$
- $x - (-1{,}2)$

Correction

On sait que $x \geqslant 6$; grâce aux principes pour les inégalités, on peut en déduire que :

$x + 4{,}5 \geqslant 6 + 4{,}5$, c'est-à-dire $x + 4{,}5 \geqslant 10{,}5$

$x - 15 \geqslant 6 - 15$, c'est-à-dire $x - 15 \geqslant -9$

$x + (-4) \geqslant 6 + (-4)$, c'est-à-dire $x + (-4) \geqslant 2$

$x - (-1{,}2) \geqslant 6 - (-1{,}2)$, c'est-à-dire $x - (-1{,}2) \geqslant 7{,}2$

Sachant que $s > -3$ déduis-en une inégalité pour $2s$.

Correction

On sait que $s > -3$; grâce aux principes pour les inégalités, on peut en déduire que :

$2 \cdot s > 2 \cdot (-3)$, c'est-à-dire $2 \cdot s > -6$

Sachant que $t \leqslant -4$ déduis-en une inégalité pour $-2t$.

Correction

On sait que $t \leqslant -4$; grâce aux principes pour les inégalités, on peut en déduire – en changeant le sens de l'inégalité ! - que :

$-2 \cdot t \geqslant -2 \cdot (-4)$, c'est-à-dire $-2 \cdot t \geqslant 8$

S'exercer papier-crayon

Exercices pp.20 avec corrigés complets pp.102-103

2 Déterminer si une (in)égalité est vraie

L'essentiel en vidéo

(In)égalités vraies ou fausses

http://sesamath.ch/postco/cl/03/v02-p

Déterminer si une (in)égalité est vraie ou fausse

http://sesamath.ch/postco/cl/03/v02-e

Je comprends B3

Théorie par l'exemple et la vidéo

Méthode

Pour **tester une égalité ou une inégalité**, on calcule séparément dans chaque membre de l'(in)égalité et on compare les résultats.

Exercices corrigés

3 rend-il vrai l'égalité $2x^2 - 5 = x + 10$?

Correction
pour $x = 3$:
$2x^2 - 5 = 2 \cdot 3^2 - 5 = 2 \cdot 9 - 5 = 13$
$x + 10 = 3 + 10 = 13$
3 rend vrai l'égalité $2x^2 - 5 = x + 10$.

2 rend-il vrai l'inégalité $3x + 5 > 2x - 8$?

Correction
pour $x = 2$:
$3x + 5 = 3 \cdot 2 + 5 = 6 + 5 = 11$
$2x - 8 = 2 \cdot 2 - 8 = 4 - 8 = -4$
$11 > -4$ donc **2** rend vrai l'inégalité $3x + 5 < 2x - 8$.

– 5 est-il solution de l'égalité $6 - 3x = 2x + 4$?

Correction
pour $x = -5$:
$6 - 3x = 6 - 3 \cdot (-5) = 6 + 15 = 21$
$2x + 4 = 2 \cdot (-5) + 4 = -10 + 4 = -6$
– 5 n'est pas solution de $6 - 3x = 2x + 4$.

– 2 est-il solution de l'inégalité $3x + 5 < -2x - 8$?

Correction
pour $x = -2$:
$3x + 5 = 3 \cdot (-2) + 5 = -6 + 5 = -1$
$2x - 8 = -2 \cdot (-2) - 8 = 4 - 8 = -4$ $-1 > -4$
donc **– 2** n'est pas solution de l'inégalité
$3x + 5 < -2x - 8$.

S'exercer papier-crayon
Exercices pp.20 avec corrigés complets pp.102-103

3 Equations du premier degré (à une inconnue)

L'essentiel en vidéo

Équations du 1er degré (à une inconnue)
http://sesamath.ch/postco/cl/03/v03-p

Résoudre une équation du premier degré (à une inconnue) : exemples
http://sesamath.ch/postco/cl/03/v03-e

Définitions

Une **équation à une inconnue** est une égalité entre deux expressions – appelés **membre de gauche** et **membre de droite** – comportant <u>une</u> lettre appelée **inconnue**.
La même lettre écrite à plusieurs endroits représente obligatoirement le même nombre.

» **Exemple :** $2x^2 - 5 = x + 10$ est une **équation** où l'inconnue est désignée par la lettre x.
Cette équation a deux membres : $2x^2 - 5$ (membre de gauche) et $x + 10$ (membre de droite).

» **Remarque :** il existe aussi des équations à plus d'une inconnue, par exemple $2x^2 - 5 = y + 10z$ est une équation à 3 inconnues x, y et z. Nous ne traitons pas les équations à plusieurs inconnues dans ce manuel.

Une **équation du premier degré (à une inconnue)** ou **équation de degré 1 (à une inconnue)** est une équation dans laquelle on n'a qu'une seule inconnue – en général notée x – et où on peut réduire chaque membre pour obtenir une expression du type $ax+b$ ou une constante.

Je comprends B3

Théorie par l'exemple et la vidéo

» Exemples

- $2x - 5 = x + 10$ est une équation du premier degré.
- $2x - 5 = -10$ est une équation du premier degré.
- $2(x - 5) + 3 = x + 10x + 7$ est une équation du premier degré, car on peut la réduire en $2x - 7 = 11x + 7$
- $2x^2 = x + 10$ n'est pas une équation du premier degré, car le terme $2x^2$ ne peut pas être réduit sous une forme $ax+b$ ou constante.
- $\frac{1}{x+1}=3x+4$ n'est pas une équation du premier degré, car le terme $\frac{1}{x+1}$ ne peut pas être réduit sous une forme $ax+b$ ou constante.

Une solution d'une équation (à une inconnue x) est une valeur de x pour laquelle l'égalité est vraie.
Résoudre (une équation à une inconnue x), c'est déterminer toutes ses solutions.

Méthode

Pour résoudre une équation du premier degré, on :

- réduit chaque membre ;
- utilise les principes d'action sur les égalités pour ajouter/soustraire ou pour multiplier/diviser par les bonnes quantités jusqu'à obtenir une équation du type x = nombre. La nouvelle équation ainsi obtenue n'est plus égale à la précédente, mais elle est **équivalente**, ce qui signifie que sa(ses) solution(s) reste(nt) exactement identique(s) ! On utilise la notation ⇔ pour indiquer qu'on obtient des **équations équivalentes**.

Exercices corrigés

Résous les équations suivantes :

- $x - 5 = 3$
- $4x = 9$
- $\frac{x}{5} = 7$

Correction

- $x - 5 = 3$
  $\Leftrightarrow x - 5 + 5 = 3 + 5$
  $\Leftrightarrow x = 8$
  La solution de cette équation est 8, ou $S=\{8\}$
- $4x = 9$
  $\Leftrightarrow 4x \div 4 = 9 \div 4$
  $\Leftrightarrow x = \frac{9}{4}$
  La solution de cette équation est $\frac{9}{4}$, ou $S=\{\frac{9}{4}\}$
- $\frac{x}{5} = 7 \Leftrightarrow \frac{x}{5} \cdot 5 = 7 \cdot 5 \Leftrightarrow x = 35$
  La solution de cette équation est 35, ou $S=\{35\}$

Résous les équations suivantes.

- $3x + 8 = 9$
- $7x + 2 = 4x + 9$.

Correction

- $3x + 8 = 9$
  $\Leftrightarrow 3x + 8 - 8 = 9 - 8$
  $\Leftrightarrow 3x = 1$
  $\Leftrightarrow 3x \div 3 = 1 \div 3$
  $\Leftrightarrow x = 1 \div 3$
  La solution de cette équation est $\frac{1}{3}$, ou $S=\{\frac{1}{3}\}$
- $7x + 2 - 4x = 4x + 9 - 4x$
  $\Leftrightarrow 3x + 2 = 9$
  $\Leftrightarrow 3x + 2 - 2 = 9 - 2$
  $\Leftrightarrow 3x = 7$
  $\Leftrightarrow 3x \div 3 = 7 \div 3$
  $\Leftrightarrow x = \frac{7}{3}$
  La solution de cette équation est $\frac{7}{3}$, ou $S=\{\frac{7}{3}\}$

Je comprends B3

Théorie par l'exemple et la vidéo

Cas particuliers

Certaines équations du premier degré (à une inconnue), n'ont aucune solution – on note alors $S=\varnothing$, où $\varnothing$ est **l'ensemble vide** ; d'autres ont tous les nombres réels comme solutions – on note $S=\mathbb{R}$.

Exercices corrigés

Résous les équations suivantes :

- $4(x-1)= x-5+3x$
- $4(x-1)= x-5+3x+1$

Correction

- $4(x-1)= x-5+3x$

$\Leftrightarrow 4x-4=4x-5$

$\Leftrightarrow 4x-4+4=4x-5+4$

$\Leftrightarrow 4x=4x-1$

$\Leftrightarrow 4x-4x=4x-1-4x$

$\Leftrightarrow 0x=-1$

aucun x ne vérifie cette équation ! $S=\varnothing$

- $4(x-1)= x-5+3x+1$

$\Leftrightarrow 4x-4=4x-4$

$\Leftrightarrow 4x-4+4=4x-4+4$

$\Leftrightarrow 4x=4x$

$\Leftrightarrow 4x-4x=4x-4x$

$\Leftrightarrow 0x=0$

tous les x vérifient cette équation ! $S=\mathbb{R}$

Définition

Une **équation-produit** est une équation dans laquelle un des membres est formé de plusieurs facteurs et l'autre est égal à 0.

» **Exemple :** $(2x-5)(x+10)=0$ où $(2x-5)$ et $(x+10)$ sont les facteurs; $(2x-5)(x+10)(-2x+1{,}5)=0$ sont des équations-produit où $(2x-5)$, $(x+10)$ et $(-2x+1{,}5)$ sont les facteurs.

» **Remarque :** les équations $(2x-5)(x+10)=0$ et $(2x-5)(x+10)(-2x+1{,}5)=0$ ne sont pas des équations de degré 1; en effet, si on développe $(2x-5)(x+10)$, on obtient $2x^2+15x-50$ qui est une expression de degré 2; $(2x-5)(x+10)=0$ est une équation de degré 2 ! Nous ne traiterons pas la résolution générale de ce type d'équation dans ce manuel.

Méthode

Pour résoudre une équation-produit, on utilise le fait qu'un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul ; il suffit donc de résoudre plusieurs équations où on annule chacun des produits.

Exercices corrigés

Résous $(x+3)(x-7)=0$.

Correction

Pour que ce produit soit nul, il faut et suffit que l'un de ses facteurs au moins soit nul.

C'est-à-dire : $x+3=0$ ou $x-7=0$

$\Leftrightarrow x=-3$ ou $\Leftrightarrow x=7$

Les solutions de l'équation-produit $(x+3)(x-7)=0$ sont -3 et 7.

On écrit aussi S = {-3;7}

S'exercer papier-crayon

Exercices pp.20 avec corrigés complets pp.102-103

Théorie par l'exemple et la vidéo

4 Inéquation (du 1er degré à une inconnue)

L'essentiel en vidéo

Inéquations du 1er degré à une inconnue

http://sesamath.ch/postco/cl/03/v04-p

Résoudre une inéquation du premier degré à une inconnue

http://sesamath.ch/postco/cl/03/v04-e

Définition

Une **inéquation à une inconnue** est une inégalité entre deux expressions – appelés **membre de gauche** et **membre de droite** – comportant une lettre appelée **inconnue**.

Une même lettre écrite à plusieurs endroits représente obligatoirement le même nombre.

» **Exemple :** $2x^2 - 5 < x + 10$ est une **inéquation** où l'inconnue est désignée par la lettre x.

Cette inéquation a deux membres : $2x^2 - 5$ (membre de gauche) et $x + 10$ (membre de droite).

» **Remarque :** Il existe aussi des inéquations à plus d'une inconnue, par exemple $2x^2 - 5 > y + 10z$ est une inéquation à 3 inconnues. Nous ne traiterons pas les inéquations à plusieurs inconnues dans ce manuel.

Définition

Une solution d'une inéquation (à une inconnue x) est une valeur de x pour laquelle l'inégalité est vraie.

Résoudre une inéquation (à une inconnue x), c'est déterminer toutes ses solutions.

Méthode

Pour résoudre une inéquation du premier degré, on :

- réduit chaque membre ;
- utilise les principes d'action sur les inégalités pour ajouter/soustraire ou pour multiplier/diviser par les bonnes quantités jusqu'à obtenir une inéquation du type x (strictement) inférieur ou supérieur au nombre. La nouvelle inéquation ainsi obtenue n'est plus égale à la précédente, mais elle est **équivalente**, ce qui signifie que ses solutions restent exactement identique(s) ! On utilise la notation ⇔ pour indiquer qu'on obtient des **inéquations équivalentes**.

Exercices corrigés

Résous l'inéquation suivante d'inconnue x :
$7x - 3 > 2x - 1$.

Correction

$7x - 3 > 2x - 1$

$\Leftrightarrow 7x - 3 - 2x > 2x - 1 - 2x$

$\Leftrightarrow 5x - 3 > -1$

$\Leftrightarrow 5x - 3 + 3 > -1 + 3$

$\Leftrightarrow 5x > 2$

$\Leftrightarrow x > \frac{2}{5}$ Les solutions sont tous les nombres strictement supérieurs à $\frac{2}{5}$

Résous l'inéquation suivante d'inconnue x :
$-3x - 8 \leqslant x - 1$.

Correction

$-4x - 8 \leqslant -1$

$\Leftrightarrow -4x \leqslant 7$

$\Leftrightarrow x \geqslant -\frac{7}{4}$

Les solutions sont tous les nombres strictement supérieurs ou égaux à $-\frac{7}{4}$.

S'exercer papier-crayon

Exercices pp.20 avec corrigés complets pp.102-103

5 Résoudre un problème avec une (in)équation

L'essentiel en vidéo

Exemples de résolution d'un problème avec une (in)équation

http://sesamath.ch/postco/cl/03/v05-e

Définition

Pour **résoudre un problème**, on peut souvent le **mettre en équation un problème**, c'est traduire son énoncé par une (in)égalité mathématique avec une inconnue. Résoudre l'(in)équation trouvée permet de répondre au problème posé.

Exercices corrigés

Trouve le nombre tel que son quintuple augmenté de 7 soit égal à 3.

Correction

Étape n°1 : Choix de l'inconnue

Soit x le nombre cherché.

Étape n°2 : Mise en équation

Le quintuple du nombre augmenté de 7 est $5x + 7$.
Pour trouver le nombre recherché, il suffit de résoudre : $5x + 7 = 3$

Étape n°3 : Résolution de l'équation

$5x + 7 = 3$

$\Leftrightarrow 5x + 7 \mathbf{- 7} = 3 \mathbf{- 7}$

$\Leftrightarrow 5x = -4$

$\Leftrightarrow \frac{\mathbf{5}x}{\mathbf{5}} = \frac{-4}{\mathbf{5}}$

Étape n°4 : Conclusion

Le nombre cherché est donc $-\frac{4}{5}$.

Jean a eu 50 chf de la part de ses grand-parents pour son anniversaire. Il souhaite s'acheter des BD Manga. Sur internet, un livre coûte 6,90 chf avec 10 chf de frais de port. Combien peut-il s'acheter de livres ?

Correction

Étape n°1 : Choix de l'inconnue

Soit x le nombre de livres que Jean pourra acheter.

Étape n°2 : Mise en équation

Un livre coûte 6,90 chf donc x livres coûteront $6{,}90 \cdot x$ chf . Avec 10 chf de frais de port, cela fera $6{,}90 \cdot x + 10$ chf.
Il suffit de résoudre : $6{,}90 \cdot x + 10 \leq 50$

Étape n°3 : Résolution de l'inéquation

$6{,}90 \cdot x \leq 40 \Leftrightarrow x \leq \frac{40}{6{,}9} \Leftrightarrow x \leq \frac{40}{6{,}9} \simeq 5{,}8$

Étape n°4 : Conclusion

Jean pourra s'acheter 5 livres.

S'exercer papier-crayon

Exercices pp.20 avec corrigés complets pp.102-103