« Fractionner les racines_fractions continues 7CO 8CO »

fichier : sm07_flr_fc_78CO.pdf

Fiche de présentation

Titre de l'activité	Fractions en escaliers
Sous-titre	Des fractions pour approcher $\sqrt{2}$
Degré(s) concerné(s)	78 CO
Durée estimée	3h
Résumé	Ces activités veulent montrer les racines sous différentes formes et familiariser l'élève avec l'utilisation de certaines fonctions de la calculatrice (fraction-décimal, programmation).
Contexte d'usage de la calculatrice	RECHERCHER/EXPLORER : l'élève aborde des notions mathématiques nouvelles ou les travaille sous un angle qu'il ne connaît pas encore ; la calculatrice permet de découvrir, de conjecturer, de produire et d'effectuer des calculs à interpréter
Contenus et compétences mathématiques visées	Utilisation d'un algorithme
Pré requis	
Lien(s) avec les plans d'études et moyens d'enseignement	789CO Nombres et Opérations: "...On leur fera découvrir graduellement les différentes écritures des nombres : ... et autres écritures à l'aide d'opérations non effectuées... et constater qu'un même nombre peut toujours avoir plusieurs écritures..." 789CO Usage de la calculatrice "Aprendre à utiliser les différentes touches et fonctions de la calculatrice"
Mots-clé	Fraction continue -
Source	Malices du Kangourou collèges 2003

Énoncé élève (activité *Fractionner les racines_fc 7-8CO*)

A) L'idée de la méthode

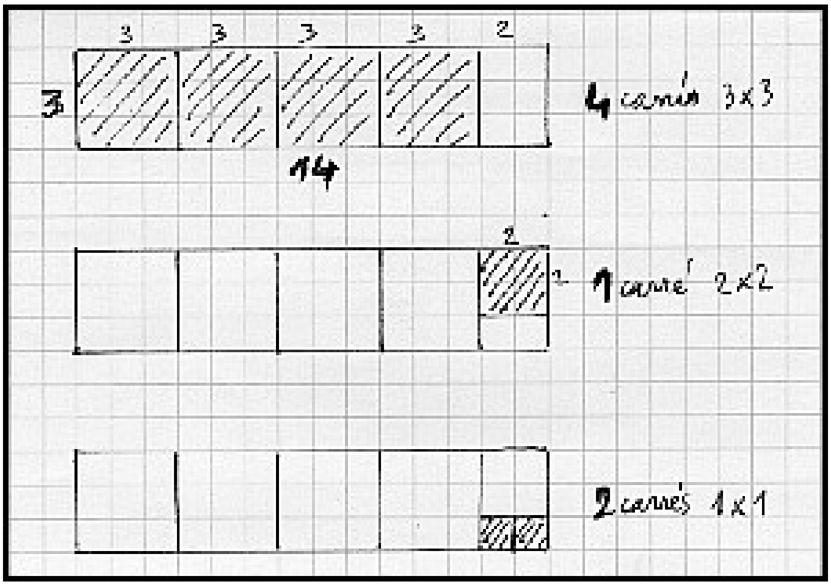
Dans certaines régions du monde, on écrit $\frac{3}{2}$ sous la forme $1\frac{1}{2}$.

Cela signifie : $\frac{3}{2} = 1,5 = 1 + \frac{1}{2}$; on a extrait l'entier !

Recommençons avec un deuxième exemple : $\frac{14}{3} = 4 + \frac{2}{3}$ *car* $4 = \frac{12}{3}$;
quand on a soustrait les entiers (ici 4 entiers) il reste un nombre, $2/3$ plus petit que 1.

L'idée est de dessiner la fraction, sous la forme d'un rectangle, et et les entiers sous la forme de carrés, puis de recommencer avec le nouveau rectangle qui apparaît:

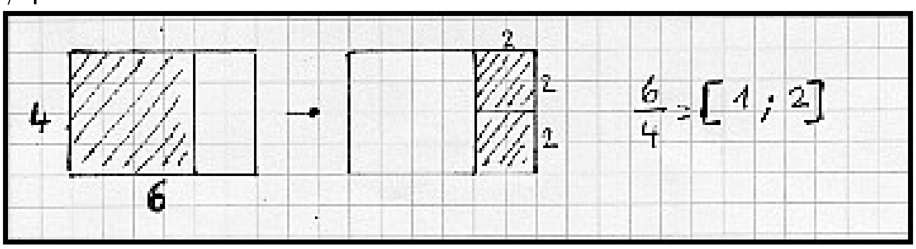
avec 14 / 3



On écrira plus simplement $\frac{14}{3} = [4 \; ; \; 1 \; , \; 2]$

(4, 1 et 2 sont des nombres entiers ; remarquer le point virgule !)
Cette écriture est appelée « fraction en escalier »

avec 6 / 4



1. Choisir des fractions et les dessiner selon la méthode de la page précédente.

Écrire toutes les fractions dessinées sous la forme d'une fraction en escalier:

$\frac{\dots}{\dots}$ = [... ; ... , ... , ...]

2. Dessiner les fractions
$[1;2]$ $[1;2,3]$ $[2;1,3]$ ainsi que celles de ton choix.

Écrire ces fractions sont leur forme habituelle.

3. Dessiner les fractions

$[1;2]$ $[1;1,2]$ $[1;1,1,2]$ $[1;1,1,1,2]$ $[1;1,1,1,1,2]$

Que remarques-tu ?

B) Utilisation des touches $\boxed{\text{OP1}}$ et $\boxed{\text{OP2}}$

La calculatrice peut trouver le nombre de carrés.
Pour cela il faut programmer la calculatrice (c'est ton professeur qui l'a fait).
Voici comment utiliser ta calculatrice avec **14 / 3.**

	Consigne	**Séquence de touches**	**partie entière**	**nombre dans la mémoire A**
	Mettre 14 / 3 dans la mémoire A	$\boxed{1}\boxed{4}\boxed{/}\boxed{3}\boxed{\text{STO}\blacktriangleright}\boxed{\text{ENTER}}$ **Attention**: $\boxed{/}$ n'est pas la touche $\boxed{\div}$		$\frac{14}{3}$
1er tour	Afficher la partie entière du nombre de la mémoire A	$\boxed{\text{OP1}}$	**4**	$\frac{14}{3}$
1er tour	Soustraire la partie entière et prendre l'inverse, puis le mettre dans la mémoire A	$\boxed{\text{OP2}}$		$\frac{3}{2}$
2ème tour	Afficher la partie entière du nombre de la mémoire A	$\boxed{\text{OP1}}$	**1**	$\frac{3}{2}$
2ème tour	Soustraire la partie entière et prendre l'inverse, puis le mettre dans la mémoire A	$\boxed{\text{OP2}}$		$\frac{2}{1}$
3ème tour	Afficher la partie entière du nombre de la mémoire A	$\boxed{\text{OP1}}$	**2**	$\frac{2}{1}$
3ème tour	Soustraire la partie entière et prendre l'inverse, puis le mettre dans la mémoire A	$\boxed{\text{OP2}}$		

La calculatrice affiche « erreur ».
Taper alors $\boxed{\text{CLEAR}}\boxed{\text{CLEAR}}\boxed{\text{CLEAR}}$ pour continuer à utiliser la calculatrice.

Les 3 parties entières qui ont été trouvées permettent d'écrire le nombre 14/3 sous la forme:

$\frac{14}{3} = [\ 4\ ;\ 1\ ,\ 2\ ]$ (fraction en escalier de 3 « marches »)

4. Quelles sont les fractions en escalier qui ont 1 « marche »?

5. Trouver, en utilisant la calculatrice, l'écriture en escalier des fractions suivantes:
13/8 19/7 11/7 .
Vérifier en faisant un croquis sur la page suivante,

C) Recherche de fractions en escaliers

6. Trouver, en utilisant la calculatrice, l'écriture en escalier des fractions suivantes:
3/2 5/3 8/5 13/8 21/13 ...
Que peut-on remarquer ?

7. Trouver, en utilisant la calculatrice, l'écriture en escalier des fractions suivantes:
8/7 9/7 10/7 11/7 12/7 13/7 14/7 15/7 16/7 17/7 ...
Que peut-on affirmer?

8. Trouver, sans la calculatrice, l'écriture en escalier de 2007 / 2006.
Si on emploie les touches $\boxed{\text{OP1}}$ et $\boxed{\text{OP2}}$ obtient la même réponse? Expliquer.

9. **À deux !**
Choisir une fraction, dont le numérateur et le dénominateur sont inférieurs à 20. Demander à son voisin de prédire le nombre de marches de la fraction escalier . Le premier trouve, mentalement ou en s'aidant d'un papier et d'un crayon, et l'autre utilise la calculatrice. Écrire les écritures trouvées.

D) Avec une feuille de papier et avec les deux méthodes

Prendre une feuille de papier de format A4.
Mesurer, au millimètre près, la longueur L et la largeur l de la feuille de papier A4.
On va appliquer les deux méthodes précédentes avec ces deux nombres entiers L et l.

10. Première méthode

Remplir avec un maximum de carrés la feuille A4, selon la méthode de la partie A) de cette activité.
Indiquer pour chaque carré la dimension de son côté.

11. Deuxième méthode

Utiliser la calculatrice, selon la méthode de la partie B) de cette activité, pour trouver l'écriture sous la forme de fraction continue. (On pourra s'aider du tableau ci-dessous)

	Consigne	**Séquence de touches**	**partie entière**
	Mettre $\frac{L}{l}$ dans la mémoire A	$\boxed{2}\boxed{9}\boxed{7}\boxed{/}\boxed{2}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{\text{STO}\blacktriangleright}\boxed{\text{ENTER}}$ **Attention**: $\boxed{/}$ n'est pas la touche $\boxed{\div}$	
1^er^ tour	Afficher la partie entière du nombre de la mémoire A	$\boxed{\text{OP1}}$	
	Soustraire la partie entière et prendre l'inverse, puis le mettre dans la mémoire A	$\boxed{\text{OP2}}$	
2^ème^ tour	Afficher la partie entière du nombre de la mémoire A	$\boxed{\text{OP1}}$	
	Soustraire la partie entière et prendre l'inverse, puis le mettre dans la mémoire A	$\boxed{\text{OP2}}$	
3^ème^ tour	Afficher la partie entière du nombre de la mémoire A	$\boxed{\text{OP1}}$	
	Soustraire la partie entière et prendre l'inverse, puis le mettre dans la mémoire A	$\boxed{\text{OP2}}$	

Combien de tours peut-on faire avant de voir s'afficher le message d'erreur?

12. Écrire la fraction en escalier qui a été trouvée.
Calculer le carré de cette fraction.

Historiquement, les fractions continues ont été utilisées en astronomie dès le cinquième siècle.

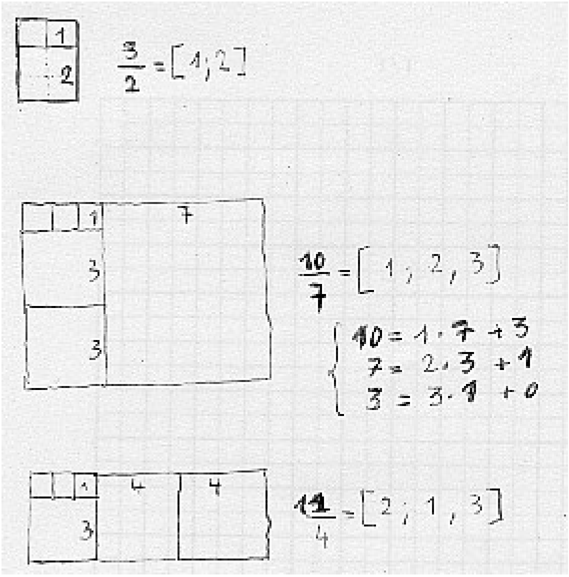
Commentaires pour le maître

(activité *Fractionner les racines_fc 7-8CO*)

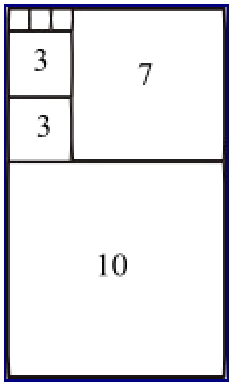
Analyse à priori de l'activité (enjeux de l'activité, démarches possibles, difficultés, relances, mise en commun)	Intentions Sous le prétexte de la découverte d'une nouvelle notion (fractions continues) c'est l'occasion d'utiliser des touches importantes, mais peu utilisées généralement, de la calculatrice. Il est nécessaire de programmer les calculatrices des élèves, comme cela est indiqué dans le corrigé. Démarches possibles Relances Les dimensions en mm d'une feuille A4 sont 297x210 Mise en commun Variables didactiques Les exemples de fractions choisis se veulent simples : attention à ne pas toujours prendre des fractions irréductibles!
Proposition(s) de déroulement	Toute l'activité se déroule en classe, par groupe de 2.
Prolongements possibles	• Activité sur la définition et l'approximation d'une racine carrée «*Fractionner les racines_ r* ».

Corrigé détaillé (activité *Fractionner les racines_fc 7-8CO*)

2.



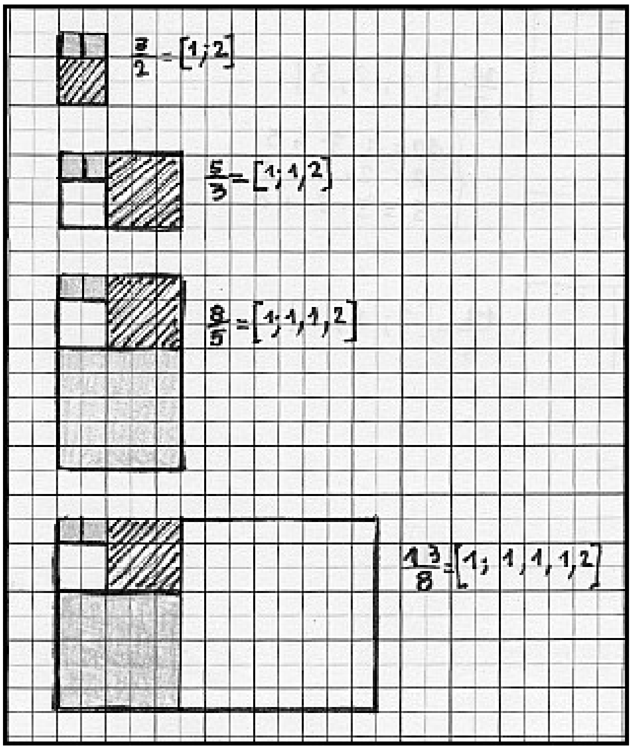
Méthode , expliquée avec un exemple, pour dessiner une fraction en escalier



Dans l'image ci-contre on peut retrouver le rationnel dont le développement est [1, 1, 2, 3]. Les trois petits carrés donnent la taille du carré suivant (3). Les deux carrés moyens et le petit carré donnent la taille du carré plus grand (7), le carré plus grand et le carré moyen donnent le dernier carré (10) et les deux derniers carrés donne la longueur du rectangle (17).
[1 ; 1 , 2 , 3]=17/10

Pour dessiner [1 ; 1 , 2 , 3] on commence par dessiner les 3 petits carrés (on peut choisir l'unité que l'on veut pour le côté des petits carrés), puis les 2 carrés moyens suivants, le carré plus grand puis le dernier carré. Il reste à additionner 7 et 10.

3.



4. Les nombres entiers naturels s'écrivent sous la forme d'une fraction en escalier, qui n'a qu'une seule marche : sa partie entière, c'est-à-dire lui-même.

5. $\frac{13}{8}=[1;1,1,1,2]$ $\quad \frac{19}{7}=[2;1,2,2]$ $\quad \frac{11}{7}=[1;1,1,3]$

6. ... On retrouve la suite de Fibonacci !
À chaque étape le nouveau numérateur est la somme du numérateur et du dénominateur de la dernière étape, et l'ancien numérateur 3 devient le dénominateur. Par suite, il suffit d'ajouter un 1 à chaque nouvelle étape :
$\frac{3}{2}=[1;2]$ $\quad \frac{5}{3}=[1;1,2]$ $\quad \frac{8}{5}=[1;1,1,2]$ $\quad \frac{13}{8}=[1;1,1,1,2]$ $\quad \ldots$

7. $\frac{8}{7}=[\mathbf{1};7]$ $\quad \frac{9}{7}=[\mathbf{1};3,2]$ $\quad \frac{10}{7}=[\mathbf{1};2,3]$ $\quad \frac{11}{7}=[\mathbf{1};1,1,3]$ $\quad \frac{12}{7}=[\mathbf{1};1,2,2]$ $\quad \frac{13}{7}=[\mathbf{1};1,6]$

$\frac{14}{7}=[2]$

$\frac{15}{7}=[\mathbf{2};7]$ $\quad \frac{16}{7}=[\mathbf{2};3,2]$ $\quad \frac{17}{7}=[\mathbf{2};1,2]$ $\quad \frac{18}{7}=[\mathbf{2};1,1,3]$ $\quad \frac{19}{7}=[\mathbf{2};1,2,2]$ $\quad \frac{20}{7}=[\mathbf{2};1,6]$.

La partie entière augmente de 1, tous les 7 nombres; les écritures en fractions en escalier se répètent à l'exception du premier entier.

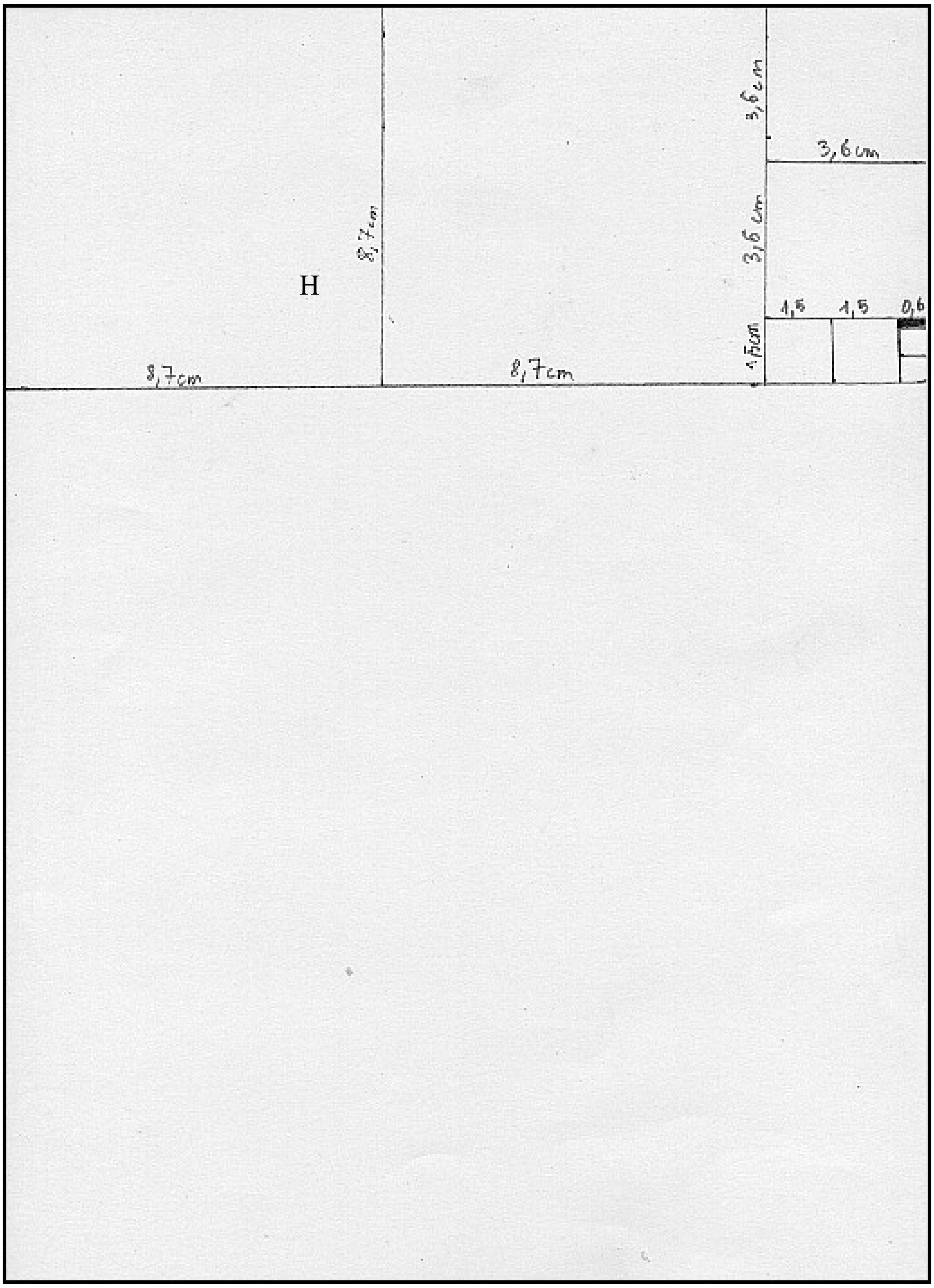
8. $\frac{2007}{2006} = \frac{2006}{2006} + \frac{1}{2006} = 1 + \frac{1}{2006} = [1; 2006]$

En utilisant les touches $\boxed{\text{OP1}}$ et $\boxed{\text{OP2}}$, la calculatrice arrondit les nombres et on obtient :

$\frac{2007}{2006} = [1; 2006, 510, 1, 2, 1, 1, 1, 3, 2, 2, 4, ...]$, résultat inexact.

9.

10.



11.

	Consigne	Séquence de touches	partie entière
	Mettre $\frac{L}{l}$ dans la mémoire A	2 9 7 ⁄ 2 1 0 STO▸ ENTER **Attention**: ⁄ n'est pas la touche ÷	
1er tour	Afficher la partie entière du nombre de la mémoire A	OP1	**1**
	Soustraire la partie entière et prendre l'inverse, puis le mettre dans la mémoire A	OP2	
2ème tour	Afficher la partie entière du nombre de la mémoire A	OP1	**2**
	Soustraire la partie entière et prendre l'inverse, puis le mettre dans la mémoire A	OP2	
3ème tour	Afficher la partie entière du nombre de la mémoire A	OP1	**2**
	Soustraire la partie entière et prendre l'inverse, puis le mettre dans la mémoire A	OP2	
4ème tour	Afficher la partie entière du nombre de la mémoire A	OP1	**2**
	Soustraire la partie entière et prendre l'inverse, puis le mettre dans la mémoire A	OP2	
5ème tour	Afficher la partie entière du nombre de la mémoire A	OP1	**2**
	Soustraire la partie entière et prendre l'inverse, puis le mettre dans la mémoire A	OP2	
6ème tour	Afficher la partie entière du nombre de la mémoire A	OP1	**2**
	Soustraire la partie entière et prendre l'inverse, puis le mettre dans la mémoire A	OP2	

Au 6ème tour apparaît le message d'erreur

12. La fraction en escalier qui a été trouvée: $\frac{297}{210} = [1 ; 2, 2, 2, 2, 2]$

Et $\left(\frac{297}{210}\right)^2 = 2{,}000204082$ $\sqrt{2} \approx \mathbf{1{,}4142}13562$ *et* $\frac{\mathbf{297}}{\mathbf{210}} \approx \mathbf{1{,}4142}85714$

Théoriquement le rapport $\frac{L}{l}$ pour les feuilles de format A4 (mais aussi A0, A1, A2, A3, A5, A6,...) est toujours égal à $\sqrt{2}$.

13. Programmer les touches [OP1] et [OP2] en tapant les séquences de touches

Attention : certaines touches nécessite l'utilisation de la touche [2nd] pour être activées: elles sont notées entre crochets et non dans un cadre.
Exemple 1 : pour la touche [▸OP1] on appuiera sur la touche [2nd] puis sur la touche OP1.
Exemple 2 : pour la touche [OP1] on appuiera seulement sur la touche OP1.
La touche [2nd] , en activant une deuxième fonction pour les touches, permet d'avoir un nombre réduit de touches sur la calculatrice.

Taper les deux séquences de touches

[▸OP1] {éventuellement effacer avec [CLEAR]} [MATH] ▶ ▶ [ENTER] [MEMVAR] [ENTER] [ )] [ENTER] [ENTER]
(**iPart** affiche la partie entière (=extrait les entiers) du nombre qui est dans la mémoire A)

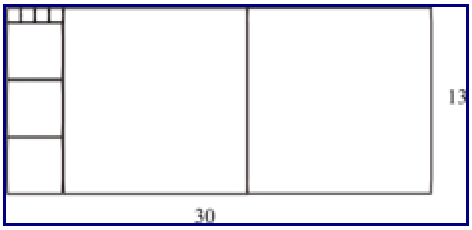
[▸OP2] {éventuellement effacer } [( ] [MATH] ▶ ▶ ▶ [ENTER] [MEMVAR] [ENTER] [ )] [ )] [x^{-1}] [STO▸] [ENTER] [ENTER]
(**fPart** calcule la partie décimale du nombre qui est dans la mémoire A et place le résultat dans la mémoire A : on peut ainsi recommencer à utiliser OP1 et OP2 avec ce nouveau nombre)

Utilisation : Mettre un nombre en mémoire (A), puis taper [OP1] [OP2] autant de fois que nécessaire (Voir le tableau à remplir dans la partie B).

Éléments pour la synthèse (activité *Fractionner les racines_fc 7-8CO*)

1 Une visualisation par un pavage de rectangle (tiré de wikipédia)

Un moyen simple de comprendre et visualiser
une fraction continue consiste à imaginer un rectangle
de dimension $L \times l$ tel que $\frac{L}{l} = x$
et de paver le rectangle par des carrés de côté l.



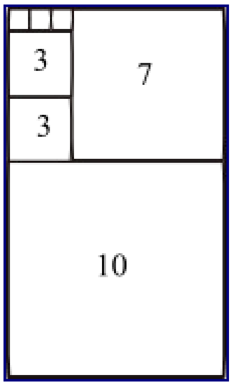
Si *x* est entier
alors le pavage comporte exactement x carrés

Sinon, il reste une bande de dimension $l \times l_1$, que l'on cherche alors à paver avec des carrés de côté l_1 et ainsi de suite.
30/13=[2 , 3, 4]

Si x est rationnel - Euclide aurait dit : *si L et l sont des longueurs commensurables* - alors le processus va s'arrêter et il existe une unité de longueur l_n qui permet de mesurer *L* et *l*. Le nombre de carrés de chaque taille donne alors la suite des entiers du développement en fraction continue.

Ainsi, dans l'image ci-dessus, on pave le rectangle 30 x 13 par deux carrés de côtés 13, la bande restante de largeur 4 est pavée de 3 carrés de côté 4, et la bande restante de largeur 1 est pavée de 4 carrés de côté 1.

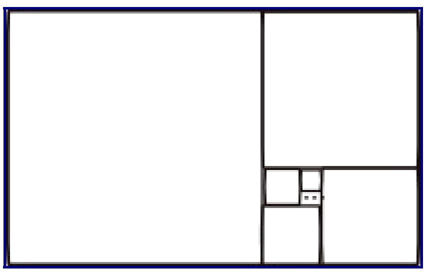
De plus la présentation du pavage pour un rationnel donne un moyen rapide de le déterminer, puisque l'on connaît l'unité de longueur permettant de *mesurer* L et l.



Ainsi dans l'image ci-contre on peut retrouver le rationnel dont le développement est [1, 1, 2, 3]. Les trois petits carrés donnent la taille du carré suivant (3). Les deux carrés moyens et le petit carré donnent la taille du carré plus grand (7), le carré plus grand et le carré moyen donnent le dernier carré (10) et les deux derniers carrés donne la longueur du rectangle (17).
[1 ; 1 , 2 , 3]=17/10

Si *x* n'est pas rationnel - Euclide aurait dit : *si L et l sont des longueurs non commensurables*, le processus se déroule à l'infini.

C'est le cas par exemple dans un rectangle d'or, pour $x = \varphi$ (nombre d'or) où l'on remarque que l'on ne peut placer qu'un carré dans chaque bande et confirme que $\varphi = [1, 1, 1, \cdots]$



Activités de consolidation (activité *Fractionner les racines_fc 7-8CO*)